vorliegende Bearbeitung des Problems, welche der Verfasser eben vollendet hatte und mir zuzuschicken ohnehin im Begriffe war. Ich glaube dieser Umstände erwähnen zu müssen, um von vornherein die völlige Selbstständigkeit unserer beiderseitigen Arbeiten ausser Zweifel zu setzen, wenn dieselbe gleich jedem aufmerksamen Leser der betreffenden Aufsätze von selbst erhellen wird, wie denn in der That Herr Prof. Grunert hauptsächlich den theoretischen Gesichtspunkt festgehalten hat, während ich die Sache vorzugsweise praktisch aufzufassen mich bemühte.“

Über die Proximitäten der Bahnen der Planeten und Kometen.

Von dem c. M. J. A. **Grunert.**

(Vorgelegt von dem w. M., Herrn Director v. Littrow.)

Einleitung.

Unter einer Proximität der Bahnen zweier Planeten, zweier Kometen, oder eines Planeten und eines Kometen, wollen wir ein Paar von Punkten dieser beiden Bahnen, von denen natürlich der eine Punkt in der einen, der andere Punkt in der anderen Bahn liegt, verstehen, deren Entfernung von einander, im Sinne der Lehre von den Maximis und Minimis in der Differentialrechnung, ein Minimum ist, und die Entfernung dieser beiden Punkte von einander selbst wollen wir die Grösse der Proximität nennen. Solcher Proximitäten kann es für jede zwei Bahnen mehrere geben, ebenso wie es in der Differentialrechnung mehrere Maxima oder Minima, auch Maxima und Minima zugleich, geben kann. Ist man aber im Besitz allgemeiner analytischer Methoden, durch welche sich alle möglichen Proximitäten zweier Bahnen in allen Fällen bestimmen lassen, so ist es, indem man die Grössen aller dieser Proximitäten mittelst bekannter Formeln der analytischen Geometrie des Raumes berechnet und dann mit einander vergleicht, natürlich auch leicht, unter diesen Proximitäten diejenige herauszufinden, welche, nach dem obigen allgemeinen Begriffe der Grösse der Proximität, die kleinste Grösse hat.

In einer ausgezeichneten Abhandlung über die „Bahnnähen zwischen den periodischen Gestirnen des Sonnensystems“, die man in den Sitzungsberichten der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, 1854, Jännerheft (Bd. XII, S. 44) findet, sagt Herr v. Littrow: „Die Frage, ob irgend Planeten oder Kometen sich einander in solchem Maasse nähern können, dass aussergewöhnliche wechselweise Wirkungen entstehen müssten, hat sehr an Interesse gewonnen, seit die Chancen für ihre Bejahung mit der raschen Zunahme der Bevölkerung dieses Systems durch entschieden bleibende Bewohner so sehr gestiegen sind. Daher kommt es denn auch, dass Versuche, klare und umfassende Anschauungen dieser Verhältnisse zu gewinnen, in unseren Tagen immer häufiger werden, während ähnliche Arbeiten in früheren Zeiten selten oder nur durch besondere Veranlassungen entstanden. Ein specieller Fall der Aufgabe, die uns hier beschäftigen wird, lenkte schon früh die Aufmerksamkeit der Astronomen auf sich und verbreitete sogar von Zeit zu Zeit in weiteren Kreisen eine gewisse Ängstlichkeit; die Möglichkeit des Zusammentreffens von Kometen mit der Erde trat mit allen ihren eingebildeten Schrecknissen an die Stelle der abergläubischen Befürchtungen, mit denen man früher diese Himmelskörper betrachtete, sobald man erkannt hatte, dass sie zwar gesetzmässig, aber nach allen Richtungen um die Sonne kreisen, und das ganze den Planeten angewiesene Gebiet durchkreuzen."

Soviel mir bekannt geworden ist, haben sich in neuester Zeit mit dem in Rede stehenden Gegenstande zunächst die Herren Gould, d'Arrest und Jahn beschäftigt. Aber alle diese Astronomen suchten in übereinstimmender Weise die kürzeste Distanz zweier Bahnen in deren gegenseitiger Knotenlinie. Dadurch wird freilich die mathematische Behandlung des Problems äusserst einfach und leicht; aber eben so gewiss ist es, dass die Ansicht, welche dieser Auffassung der Aufgabe zu Grunde liegt, von dem geometrischen Standpunkte aus, auf den es doch hierbei zunächst nur allein ankommen kann, als eine ganz verfehlte bezeichnet werden muss, als eine Ansicht, die auf einer strengen mathematischen Basis zu fussen gar nicht im Stande ist, und eine innere Berechtigung dazu gar nicht besitzt, sondern, insofern es sich um die wirklichen Proximitäten zweier Bahnen handelt, blos auf einer ganz vagen Anschauungsweise beruht. Herrn v. Littrow gebührt unstreitig das Verdienst, in der oben angeführten Abhandlung das Problem zuerst aus dem allein richtigen geometrischen Gesichtspunkte aufgefasst zu haben. Indess kam es Herrn v. Littrow zunächst weniger auf die theoretische Seite der Aufgabe

— wenn gleich er dieselbe keineswegs ganz unberücksichtigt gelassen und auch in dieser Beziehung schon Wesentliches geleistet hat, — als vielmehr auf deren praktische Seite an, nämlich auf die in unserem Sonnensysteme sich wirklich findenden Proximitäten. Desshalb zog er es für jetzt in sehr sinnreicher Weise vor, die Aufgabe von dem in Rede stehenden praktischen Standpunkte aus mit Hülfe eines von Herrn Gustav Starke, der sich zur Zeit auf der Wiener Sternwarte erfolgreichen astronomischen Studien widmete, mit ungemeiner Genauigkeit und Sauberkeit angefertigten Modells aller hier zur Betrachtung kommenden Planeten- und Kometen-Bahnen, dessen nähere Beschreibung man a. a. O. mit grossem Vergnügen lesen wird, und daran angeknüpfter graphischer Methoden zu lösen, und zwar in so ausgezeichneter und vollständiger Weise, dass in dieser Beziehung wenig mehr zu thun übrig zu sein scheint. Dagegen dürfte die rein mathematische Behandlung der Aufgabe noch manche interessante und bemerkenswerthe Gesichtspunkte darbieten. Von diesem rein geometrischen Standpunkte aus habe ich die Aufgabe von den Proximitäten der Bahnen der Planeten und Kometen in der vorliegenden Abhandlung zu behandeln gesucht, wobei sich freilich gezeigt hat, dass man fast in allen Fällen auf Gleichungen höherer Grade geführt wird, deren Auflösung die Kräfte der jetzigen Algebra, insofern man sich nicht auf blosse Näherungsmethoden beschränken will, übersteigt. Geleitet von der Ansicht, dass die vollständige Entwickelung dieser höheren Gleichungen einen wesentlichen Nutzen nicht gewähren würde, habe ich vielmehr die Auflösung der verschiedenen Aufgaben so weit zu führen gesucht, dass dieselben blos mittelst Gleichungen des ersten und des zweiten Grades auf dem Wege der successiven Näherungen ausgeführt werden kann, wobei ich es mir zugleich habe angelegen sein lassen, die betreffenden Auflösungen so anzuordnen, dass die zu bestimmende unbekannte Grösse bei dem Anfange der successiven Näherung zwischen so engen Grenzen eingeschlossen wurde, als die Natur der Aufgabe irgend gestattete. Wenn ich auch gern zuzugeben geneigt bin, dass sich noch manche Abkürzungen und Vereinfachungen der von mir gegebenen Auflösungen werden auffinden lassen: so hoffe ich doch auf der anderen Seite, dass man mir das Zeugniss nicht versagen wird, nach möglichster Einfachheit und Leichtigkeit wenigstens eifrig gestrebt, und die Grundlagen festgestellt zu haben, von denen man bei allen weiteren

Forschungen über diesen wichtigen und interessanten Gegenstand nothwendig ausgehen müssen wird. Habe ich auch vorzugsweise die geometrische Seite des Problems im Auge gehabt, so habe ich doch zugleich die Darstellung so einzurichten gesucht, dass eine unmittelbare Anwendung der entwickelten Formeln und Gleichungen in der Astronomie möglich ist; und um diese Anwendung noch mehr zu fördern und zu erleichtern, habe ich in einigen der Abhandlung am Ende beigefügten Anmerkungen die astronomische Bedeutung der gebrauchten Symbole, nachgewiesen und an Beispielen erläutert.

I. Entwickelung der allgemeinen Grundformeln.

Wir wollen, um eine sichere Basis für das Folgende zu gewinnen und von möglichst einfachen Principien auszugehen, zuerst die Proximitäten zweier beliebigen geraden Linien im Raume auf analytischem Wege bestimmen, welche Betrachtung uns unmittelbar zu dem richtigen Gesichtspunkte, aus welchem wir unser Problem im Allgemeinen zu betrachten, und dann auch leicht zu den allgemeinen Formeln oder Gleichungen, aus denen wir dessen Auflösung in allen Fällen abzuleiten haben, führen wird.

Die Gleichungen der beiden gegebenen geraden Linien im Raume in einer bekannten besonders eleganten Form seien:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{x-a}{\cos\alpha} = \dfrac{y-b}{\cos\beta} = \dfrac{z-c}{\cos\gamma}, \\[2ex] \dfrac{x-a_1}{\cos\alpha_1} = \dfrac{y-b_1}{\cos\beta_1} = \dfrac{z-c_1}{\cos\gamma_1}; \end{cases}$$

immer unter Voraussetzung rechtwinkeliger Coordinaten. Sind nun $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1)$ die beiden Punkte dieser geraden Linien, deren Entfernung E von einander ein Minimum werden soll, so haben wir zur Bestimmung der Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$ dieser beiden Punkte nach (1) zuvörderst die vier folgenden Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{x}-a}{\cos\alpha} = \dfrac{\mathfrak{y}-b}{\cos\beta} = \dfrac{\mathfrak{z}-c}{\cos\gamma}, \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{x}_1-a_1}{\cos\alpha_1} = \dfrac{\mathfrak{y}_1-b_1}{\cos\beta_1} = \dfrac{\mathfrak{z}_1-c_1}{\cos\gamma_1}; \end{cases}$$

zu denen wegen der Bedingungen der Aufgabe noch die Gleichung

$$(3)\qquad E = \sqrt{(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)^2 + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)^2 + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)^2} = \text{Minimum},$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichung

$$(4)\qquad E^2 = (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)^2 + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)^2 + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)^2 = \text{Minimum}$$ tritt.

Da wir uns vermöge der Gleichungen (2) die Coordinaten $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ durch $\mathfrak{x}$, sowie die Coordinaten $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ durch $\mathfrak{x}_1$ ausgedrückt denken können, so ist E oder E^2 als eine Function der beiden von einander unabhängigen veränderlichen Grössen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ zu betrachten, und man kann dann in dieser Beziehung die aus der Differentialrechnung bekannten Bedingungen des Minimums anwenden. Zu dem Ende müssen wir zuerst die, natürlich partiellen, Differentialquotienten

$$\frac{dE}{d\mathfrak{x}} \text{ und } \frac{dE}{d\mathfrak{x}_1}$$

entwickeln. Aus der Gleichung

$$E^2 = (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)^2 + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)^2 + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)^2$$

folgt aber durch partielle Differentiation nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$, wobei man zu beachten hat, dass $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ nur von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{z}_1$ nur von $\mathfrak{x}_1$ abhängen

$$E\frac{dE}{d\mathfrak{x}} = (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1) + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}},$$

$$E\frac{dE}{d\mathfrak{x}_1} = -(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1) - (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\frac{d\mathfrak{y}_1}{d\mathfrak{x}_1} - (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\frac{d\mathfrak{z}_1}{d\mathfrak{x}_1}.$$

Weil nun nach den bekannten Bedingungen des Maximums und Minimums

$$\frac{dE}{d\mathfrak{x}} = 0, \quad \frac{dE}{d\mathfrak{x}_1} = 0$$

sein muss, so liefert das Vorhergehende unmittelbar die beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{x}'-\mathfrak{x} + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}} = 0,$$

$$\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1 + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\frac{d\mathfrak{y}_1}{d\mathfrak{x}_1} + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\frac{d\mathfrak{z}_1}{d\mathfrak{x}_1} = 0.$$

Wegen der Gleichungen (2) ist aber:

$$\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}, \quad \frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}} = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha};$$

$$\frac{d\mathfrak{y}_1}{d\mathfrak{x}_1} = \frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1}, \quad \frac{d\mathfrak{z}_1}{d\mathfrak{x}_1} = \frac{\cos\gamma_1}{\cos\alpha_1};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$(5)\quad \begin{cases} (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)\cos\alpha + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\cos\beta + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\cos\gamma = 0, \\ (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)\cos\alpha_1 + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\cos\beta_1 + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\cos\gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Die sechs Gleichungen (2) und (5), nämlich die Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{x}-a}{\cos\alpha} = \dfrac{\mathfrak{y}-b}{\cos\beta} = \dfrac{\mathfrak{z}-c}{\cos\gamma}, \\ \dfrac{\mathfrak{x}_1-a_1}{\cos\alpha_1} = \dfrac{\mathfrak{y}_1-b_1}{\cos\beta_1} = \dfrac{\mathfrak{z}_1-c_1}{\cos\gamma_1}, \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)\cos\alpha + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\cos\beta + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\cos\gamma = 0, \\ (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)\cos\alpha_1 + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\cos\beta_1 + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\cos\gamma_1 = 0; \end{cases}$$

sind zur vollständigen Bestimmung der sechs gesuchten Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ im Allgemeinen hinreichend; und da diese sechs Gleichungen sämmtlich vom ersten Grade sind, so erhellet zugleich, dass es für zwei gerade Linien im Raume immer nur eine Proximität gibt, insofern es nämlich überhaupt eine solche gibt.

Um über Letzteres zu entscheiden, d. h. um zu entscheiden, ob die Entfernung der beiden Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1)$, deren Coordinaten durch die Gleichungen (6) bestimmt werden, von einander wirklich ein Minimum ist, müssen wir mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\frac{dE}{d\mathfrak{x}} = 0, \quad \frac{dE}{d\mathfrak{x}_1} = 0$$

noch die zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}^2}, \quad \frac{d^2E}{d\mathfrak{x}_1^{\,2}}, \quad \frac{d^2E}{d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x}_1}$$

entwickeln. Aus den aus dem Vorhergehenden bekannten Gleichungen

$$E\frac{dE}{d\mathfrak{x}} = \quad (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1) + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}},$$

$$E\frac{dE}{d\mathfrak{x}_1} = -(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1) - (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\frac{d\mathfrak{y}_1}{d\mathfrak{x}_1} - (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\frac{d\mathfrak{z}_1}{d\mathfrak{x}_1}$$

folgt aber durch fernere Differentiation:

$$\left(\frac{dE}{d\mathfrak{x}}\right)^2 + E\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}^2}$$

$$= 1 + \left(\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}}\right)^2 + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\frac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2} + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}^2},$$

$$\left(\frac{dE}{d\mathfrak{x}_1}\right)^2 + E\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}_1^{\,2}}$$

$$= 1 + \left(\frac{d\mathfrak{y}_1}{d\mathfrak{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{z}_1}{d\mathfrak{x}_1}\right)^2 - (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\frac{d^2\mathfrak{y}_1}{d\mathfrak{x}_1^{\,2}} - (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\frac{d^2\mathfrak{z}_1}{d\mathfrak{x}_1^{\,2}};$$

also, weil nach dem Obigen offenbar

$$\frac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2} = 0, \quad \frac{d^2\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}^2} = 0; \quad \frac{d^2\mathfrak{y}_1}{d\mathfrak{x}_1^{\,2}} = 0, \quad \frac{d^2\mathfrak{z}_1}{d\mathfrak{x}_1^{\,2}} = 0$$

ist, zugleich mit Rücksicht darauf, dass

$$\frac{dE}{d\mathfrak{x}} = 0, \quad \frac{dE}{d\mathfrak{x}_1} = 0$$

ist:

$$E\,\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}^2}=1+\left(\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right)^2+\left(\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}}\right)^2,$$

$$E\,\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}_1{}^2}=1+\left(\frac{d\mathfrak{y}_1}{d\mathfrak{x}_1}\right)^2+\left(\frac{d\mathfrak{z}_1}{d\mathfrak{x}_1}\right)^2;$$

woraus man sieht, dass die zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}^2}\quad\text{und}\quad\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}_1{}^2}$$

beide positiv sind, wie es zu einem Minimum bekanntlich erforderlich ist.

Differentiirt man ferner die Gleichung

$$E\,\frac{dE}{d\mathfrak{x}}=(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)+(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\,\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}+(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\,\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}}$$

nach $\mathfrak{x}_1$, so erhält man

$$\frac{dE}{d\mathfrak{x}}\cdot\frac{dE}{d\mathfrak{x}_1}+E\,\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x}_1}$$

$$=-1-\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\cdot\frac{d\mathfrak{y}_1}{d\mathfrak{x}_1}-\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}}\cdot\frac{d\mathfrak{z}_1}{d\mathfrak{x}_1}+(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\,\frac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x}_1}+(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\,\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}d\mathfrak{x}_1},$$

also, weil nach dem Obigen offenbar

$$\frac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x}_1}=0,\quad\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x}_1}=0$$

ist, indem man zugleich wieder die Gleichungen

$$\frac{dE}{d\mathfrak{x}}=0,\quad\frac{dE}{d\mathfrak{x}_1}=0$$

berücksichtigt.

$$E\,\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x}_1}=-1-\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\cdot\frac{d\mathfrak{y}_1}{d\mathfrak{x}_1}-\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}}\cdot\frac{d\mathfrak{z}_1}{d\mathfrak{x}_1}.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},\quad\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}}=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha};$$

$$\frac{d\mathfrak{y}_1}{d\mathfrak{x}_1}=\frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1},\quad\frac{d\mathfrak{z}_1}{d\mathfrak{x}_1}=\frac{\cos\gamma_1}{\cos\alpha_1};$$

also

$$1+\left(\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right)^2+\left(\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}}\right)^2=\frac{\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2}{\cos\alpha^2}=\frac{1}{\cos\alpha^2},$$

$$1+\left(\frac{d\mathfrak{y}_1}{d\mathfrak{x}_1}\right)^2+\left(\frac{d\mathfrak{z}_1}{d\mathfrak{x}_1}\right)^2=\frac{\cos\alpha_1{}^2+\cos\beta_1{}^2+\cos\gamma_1{}^2}{\cos\alpha_1{}^2}=\frac{1}{\cos\alpha_1{}^2},$$

$$1+\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\cdot\frac{d\mathfrak{y}_1}{d\mathfrak{x}_1}+\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}}\cdot\frac{d\mathfrak{z}_1}{d\mathfrak{x}_1}=\frac{\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1}{\cos\alpha\cos\alpha_1}.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$E\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}^2}=\frac{1}{\cos\alpha^2},\quad E\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}_1{}^2}=\frac{1}{\cos\alpha_1{}^2};$$

$$E\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x}_1}=-\frac{\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1}{\cos\alpha\;\cos\alpha_1};$$

und daher:

$$E^2\left\{\left(\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x}_1}\right)^2-\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}^2}\cdot\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}_1{}^2}\right\}$$

$$=\frac{(\cos\alpha\;\cos\alpha_1+\cos\beta\;\cos\beta_1+\cos\gamma\;\cos\gamma_1)^2-1}{\cos\alpha^2\;\cos\alpha_1{}^2}.$$

Nun ist aber, wenn wir einen jeden der zwei von den beiden gegebenen geraden Linien eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel durch Θ bezeichnen, bekanntlich:

$$\cos\Theta=\pm(\cos\alpha\;\cos\alpha_1+\cos\beta\;\cos\beta_1+\cos\gamma\;\cos\gamma_1),$$

also nach dem Obigen:

$$E^2\left\{\left(\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x}_1}\right)^2-\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}^2}\cdot\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}_1{}^2}\right\}=\frac{\cos\Theta^2-1}{\cos\alpha^2\cos\alpha_1{}^2}=-\frac{\sin\Theta^2}{\cos\alpha^2\cos\alpha_1{}^2},$$

folglich offenbar

$$\left(\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{x}_1}\right)^2-\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}^2}\cdot\frac{d^2E}{d\mathfrak{x}_1{}^2}$$

eine negative Grösse, wie es bekanntlich das Minimum erfordert.

Hiernach sind also alle Bedingungen des Minimums vollständig erfüllt, und es findet daher wirklich ein Minimum, aber auch nur eines, Statt.

Hat man die Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$, mittelst der Gleichungen (6) bestimmt, so findet man deren kürzeste Entfernung E selbst mittelst der Formel

$$(7)\qquad E=\sqrt{(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)^2+(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)^2+(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)^2},$$

und man kann also jetzt im vorliegenden Falle nicht blos die Lage der beiden, der einen Proximität, die es gibt, entsprechenden Punkte der zwei gegebenen geraden Linien, sondern auch die Grösse dieser Proximität bestimmen.

Wir wollen jetzt die gerade Linie, welche auf den beiden durch die Gleichungen

$$(8)\qquad \begin{cases}\dfrac{x-a}{\cos\alpha}=\dfrac{y-b}{\cos\beta}=\dfrac{z-c}{\cos\gamma},\\[2ex]\dfrac{x-a_1}{\cos\alpha_1}=\dfrac{y-b_1}{\cos\beta_1}=\dfrac{z-c_1}{\cos\gamma_1}\end{cases}$$

gegebenen geraden Linien zugleich senkrecht steht, bestimmen. Sind u, v, w und u_1, v_1, w_1 die Coordinaten der Punkte, in denen die beiden gegebenen geraden Linien von der gesuchten geraden Linie geschnitten werden, so haben wir zu deren Bestimmung zuvörderst die vier folgenden Gleichungen:

$$\frac{u-a}{\cos\alpha}=\frac{v-b}{\cos\beta}=\frac{w-c}{\cos\gamma},$$

$$\frac{u_1-a_1}{\cos\alpha_1}=\frac{v_1-b_1}{\cos\beta_1}=\frac{w_1-c_1}{\cos\gamma_1}.$$

Weil ferner

$$\frac{x-u}{u-u_1}=\frac{y-v}{v-v_1}=\frac{z-w}{w-w_1},$$

oder

$$\frac{x-u_1}{u-u_1}=\frac{y-v_1}{v-v_1}=\frac{z-w_1}{w-w_1}$$

die Gleichungen der gesuchten, durch die Punkte (u, v, w) und (u_1, v_1, w_1) gehenden geraden Linie, die auf den beiden gegebenen geraden Linien senkrecht stehen soll, sind; so liefern uns die Lehren der analytischen Geometrie die beiden folgenden Bedingungsgleichungen:

$$1+\frac{v-v_1}{u-u_1}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}+\frac{w-w_1}{u-u_1}\cdot\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}=0,$$

$$1+\frac{v-v_1}{u-u_1}\cdot\frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1}+\frac{w-w_1}{u-u_1}\cdot\frac{\cos\gamma_1}{\cos\alpha_1}=0$$

oder

$$(u-u_1)\cos\alpha+(v-v_1)\cos\beta+(w-w_1)\cos\gamma=0,$$

$$(u-u_1)\cos\alpha_1+(v-v_1)\cos\beta_1+(w-w_1)\cos\gamma_1=0,$$

und zur Bestimmung von u, v, w und u_1, v_1, w_1 haben wir daher die sechs folgenden Gleichungen:

$$(9)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{u-a}{\cos\alpha}=\dfrac{v-b}{\cos\beta}=\dfrac{w-c}{\cos\gamma},\\[2ex] \dfrac{u_1-a_1}{\cos\alpha_1}=\dfrac{v_1-b_1}{\cos\beta_1}=\dfrac{w_1-c_1}{\cos\gamma_1},\\[2ex] (u-u_1)\cos\alpha+(v-v_1)\cos\beta+(w-w_1)\cos\gamma=0,\\ (u-u_1)\cos\alpha_1+(v-v_1)\cos\beta_1+(w-w_1)\cos\gamma_1=0.\end{array}\right.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Gleichungen (6), so ist klar, dass

$$u=\mathfrak{x}\;,\quad v=\mathfrak{y}\;,\quad w=\mathfrak{z};$$

$$u_1=\mathfrak{x}_1\;,\quad v_1=\mathfrak{y}_1\;,\quad w_1=\mathfrak{z}_1$$

ist. Also steht die kürzeste Entfernung zweier geraden Linien auf diesen beiden geraden Linien senkrecht [1]), und um die kürzeste Entfernung zweier geraden Linien zu finden, wird man also die Lage der auf diesen beiden geraden Linien senkrecht stehenden geraden Linie zu ermitteln, und die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser geraden Linie mit den beiden gegebenen geraden Linien zu suchen haben.

Zu der Aufgabe, welche uns in dieser Abhandlung beschäftigen wird, steht nun das Vorhergehende in der folgenden sehr engen Beziehung. Weil die Richtung jeder Curve in der unmittelbarsten Nähe eines beliebigen ihrer Punkte durch ihre Berührende in diesem Punkte dargestellt wird, so ist aus dem Vorhergehenden unmittelbar klar, dass, um die Punkte zweier beliebigen Curven im Raume zu ermitteln, deren Entfernungen von einander Minima darbieten, d. h. um die Proximitäten zweier Curven im Raume zu finden, man die auf diesen beiden Curven zugleich senkrecht stehenden geraden Linien und deren Durchschnittspunkte mit den beiden Curven zu bestimmen suchen muss. Da es solcher auf den beiden Curven zugleich senkrecht stehender gerader Linien in gewissen Fällen mehrere geben kann, so kann es in gewissen Fällen auch mehrere Paare von Punkten der beiden Curven geben, deren Entfernungen von einander, natürlich im Sinne der Lehre von den Maximis und Minimis in der Differentialrechnung, Minima darbieten, d. h. es kann in gewissen Fällen mehrere Proximitäten der beiden Curven geben. Das kleinste unter diesen Minimis, ein sogenanntes Minimum Minimorum, wird dann das Paar zusammengehörender Punkte der beiden gegebenen Curven bestimmen, deren Entfernung von einander wirklich die allerkleinste ist. Diesen Gesichtspunkt werden wir im Folgenden bei der Ermittelung der Proximitäten der Bahnen der Planeten und Kometen stets festhalten.

Das Bisherige setzt uns nun auch unmittelbar in den Stand, mit Leichtigkeit die allgemeinen Formeln oder Gleichungen aufzustellen, auf welche wir bei der Ermittelung der Proximitäten zweier

---

[1]) Dass man dies auch leicht elementar-geometrisch beweisen kann, ist bekannt; die Vorzüge der allgemeinen analytischen Darstellung liegen aber hauptsächlich darin, dass durch dieselbe der bestimmte Nachweis geführt wird, dass es nur ein Minimum, auch kein Maximum gibt.

beliebigen Curven im Raume immer werden zurückkommen müssen. Sind nämlich

$$(10)\qquad v=f(u),\quad w=F(u)$$

die Gleichungen einer beliebigen Curve im Raume, so ist für x, y, z als veränderliche Coordinaten nach den Lehren der höheren Geometrie

$$(11)\qquad x-u+(y-v)\frac{dv}{du}+(z-w)\frac{dw}{du}=0$$

die Gleichung der Normalebene dieser Curve in dem Punkte (uvw); und sind ferner

$$(10^*)\qquad v=f_1(u),\quad w=F_1(u)$$

die Gleichungen einer zweiten Curve im Raume, so ist ebenso, wenn für Punkte dieser zweiten Curve die Coordinaten durch u_1, v_1, w_1 bezeichnet werden,

$$(11^*)\qquad x-u_1+(y-v_1)\frac{dv_1}{du_1}+(z-w_1)\frac{dw_1}{du_1}=0$$

die Gleichung der Normalebene dieser zweiten Curve in dem Punkte $(u_1\, v_1\, w_1)$. Soll nun die durch die Punkte $(u\, v\, w)$ und $(u_1\, v_1\, w_1)$ der Lage nach bestimmte gerade Linie, deren Gleichungen

$$(12)\qquad \frac{x-u}{\cos\varphi}=\frac{y-v}{\cos\psi}=\frac{z-w}{\cos\chi}$$

oder

$$(12^*)\qquad \frac{x-u_1}{\cos\varphi}=\frac{y-v_1}{\cos\psi}=\frac{z-w_1}{\cos\chi}$$

sein mögen, auf den beiden gegebenen Curven zugleich senkrecht stehen, so muss diese gerade Linie in den beiden Normalebenen unserer Curven in den Punkten $(u\, v\, w)$ und $(u_1\, v_1\, w_1)$ zugleich liegen, was nach dem Obigen die beiden Gleichungen

$$(13)\qquad \begin{cases} \cos\varphi+\dfrac{dv}{du}\cos\psi+\dfrac{dw}{du}\cos\chi=0, \\ \cos\varphi+\dfrac{dv_1}{du_1}\cos\psi+\dfrac{dw_1}{du_1}\cos\chi=0 \end{cases}$$

gibt. Ausserdem ergeben sich aus (12) oder (12*) die beiden Gleichungen

$$(14)\qquad \frac{u-u_1}{\cos\varphi}=\frac{v-v_1}{\cos\psi}=\frac{w-w_1}{\cos\chi},$$

so dass man also jetzt überhaupt die folgenden neun Gleichungen hat:

$$
(15)\quad \begin{cases}
v = f(u), \quad w = F(u); \\
v_1 = f_1(u_1), \quad w_1 = F_1(u_1); \\
\dfrac{u-u_1}{\cos\varphi} = \dfrac{v-v_1}{\cos\psi} = \dfrac{w-w_1}{\cos\chi}; \\
\cos\varphi + \dfrac{dv}{du}\cos\psi + \dfrac{dw}{du}\cos\chi = 0, \\
\cos\varphi + \dfrac{dv_1}{du_1}\cos\psi + \dfrac{dw_1}{du_1}\cos\chi = 0; \\
\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1;
\end{cases}
$$

mittelst welcher sich die neun unbekannten Grössen

$$u, v, w; \quad u_1, v_1, w_1; \quad \varphi, \psi, \chi$$

bestimmen lassen; kennt man aber diese Grössen, so ist offenbar die Lage der auf den beiden gegebenen Curven senkrecht stehenden geraden Linie vollkommen bestimmt.

Übrigens lassen φ, ψ, χ aus den vorstehenden Gleichungen sich sogleich eliminiren. Weil nämlich

$$\cos\psi = \frac{v-v_1}{u-u_1}\cos\varphi, \quad \cos\chi = \frac{w-w_1}{u-u_1}\cos\varphi$$

ist, so führen die beiden Gleichungen

$$\cos\varphi + \frac{dv}{du}\cos\psi + \frac{dw}{du}\cos\chi = 0,$$

$$\cos\varphi + \frac{dv_1}{du_1}\cos\psi + \frac{dw_1}{du_1}\cos\chi = 0$$

auf der Stelle zu den Gleichungen:

$$u-u_1 + (v-v_1)\frac{dv}{du} + (w-w_1)\frac{dw}{du} = 0,$$

$$u-u_1 + (v-v_1)\frac{dv_1}{du_1} + (w-w_1)\frac{dw_1}{du_1} = 0;$$

und man hat daher zur Bestimmung der sechs Coordinaten u, v, w und u_1, v_1, w_1 die sechs folgenden Gleichungen:

$$
(16)\quad \begin{cases}
v = f(u), \quad w = F(u); \\
v_1 = f_1(u_1), \quad w_1 = F_1(u_1); \\
u-u_1 + (v-v_1)\dfrac{dv}{du} + (w-w_1)\dfrac{dw}{du} = 0, \\
u-u_1 + (v-v_1)\dfrac{dv_1}{du_1} + (w-w_1)\dfrac{dw_1}{du_1} = 0;
\end{cases}
$$

welche wir unseren folgenden Untersuchungen hauptsächlich zu Grunde legen werden. Nachdem man u, v, w und u_1, v_1, w_1 mittelst dieser Gleichungen gefunden hat, dienen zur Bestimmung der Winkel φ, ψ, χ die Gleichungen:

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{u-u_1}{\cos\varphi} = \dfrac{v-v_1}{\cos\psi} = \dfrac{w-w_1}{\cos\chi}, \\ \cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1; \end{cases}$$

und zur Bestimmung der kürzesten Entfernung E selbst, hat man die Formel

$$(18)\qquad E = \sqrt{(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2 + (w-w_1)^2},$$

oder auch, wie man mittels (17) leicht findet, die Formeln:

$$(19)\qquad E = val.\,abs.\,\frac{u-u_1}{\cos\varphi} = val.\,abs.\,\frac{v-v_1}{\cos\psi} = val.\,abs.\,\frac{w-w_1}{\cos\chi}.$$

Wenn die eine der beiden gegebenen Curven, etwa die erste, ganz in der Ebene der xy liegt, so ist allgemein

$$w = o, \text{ also auch } \frac{dw}{du} = o;$$

und die allgemeinen Gleichungen (16) werden folglich in diesem Falle:

$$(20)\qquad \begin{cases} v = f(u), \; w = 0; \\ v_1 = f_1(u_1), \; w_1 = F_1(u_1); \\ u-u_1 + (v-v_1)\dfrac{dv}{du} = 0, \\ u-u_1 + (v-v_1)\dfrac{dv_1}{du_1} - w_1\dfrac{dw_1}{du_1} = 0. \end{cases}$$

II. Allgemeine Gleichungen einer elliptischen Bahn.

Den von dem Mittelpunkte der Sonne eingenommenen Brennpunkt einer elliptischen Bahn, wollen wir als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz, übrigens aber die Axen der x, y, z willkürlich annehmen, und wollen unter dieser Voraussetzung jetzt die allgemeinen Gleichungen der elliptischen Bahn, indem wir dieselbe als eine Curve im Raume betrachten, entwickeln, indem die Kenntniss dieser Gleichungen für die Auflösung unsers Problems natürlich von der grössten Wichtigkeit ist.

Die Knotenlinie der Bahn, worunter wir die Durchschnittslinie ihrer Ebene mit der Ebene der xyz verstehen, wird durch den

Anfang der Coordinaten in zwei Theile getheilt, von denen wir der Kürze wegen den einen den positiven, den anderen den negativen Theil der Knotenlinie nennen wollen. Der von dem positiven Theile der Knotenlinie mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossene Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch von 0 bis 360° zählen, soll durch w bezeichnet werden. Den positiven Theil der Knotenlinie nehmen wir als den positiven Theil der Axe der x_1 eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $x_1\ y_1\ z_1$ an, welches mit dem Coordinatensysteme der $x\ y\ z$ den Anfang gemein hat, und lassen die Ebene der $x_1\ y_1$ mit der Ebene der $x\,y$ zusammenfallen; der positive Theil der Axe der y_1 wird so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x_1 an durch den rechten Winkel $(x_1\ y_1)$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y_1 zu gelangen, nach derselben Seite hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen; den positiven Theil der Axe der z_1 lassen wir mit dem positiven Theile der Axe der z zusammenfallen. Unter diesen Voraussetzungen haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten zwischen den Coordinaten der Systeme der xyz und $x_1\ y_1\ z_1$ die folgenden Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = x_1 \cos\omega - y_1 \sin\omega, \\ y = x_1 \sin\omega + y_1 \cos\omega, \\ z = z_1; \end{cases}$$

aus denen sich leicht umgekehrt

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = x \cos\omega + y \sin\omega, \\ y_1 = -x \sin\omega + y \cos\omega, \\ z_1 = z \end{cases}$$

ergibt. Den 180° nicht übersteigenden Winkel, welchen der auf der positiven Seite der Ebene der xy oder $x_1\ y_1$ liegende Theil der Ebene der Bahn mit dem der beiden Theile, in welche die Ebene der xy oder $x_1\ y_1$ durch die Axe der x_1 getheilt wird, in dem der positive Theil der Axe der y_1 liegt, einschliesst, wollen wir durch i bezeichnen. Dann ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$(3)\qquad z_1 = y_1 \tang i$$

die Gleichung der Ebene der Bahn in dem Systeme der $x_1\, y_1\, z_1$. Folglich ist nach (2)

$$z = -(x \sin \omega - y \cos \omega) \tang i,$$

oder

$$(4) \qquad x \sin \omega \tang i - y \cos \omega \tang i + z = 0,$$

oder

$$(4^*) \qquad x \sin \omega \sin i - y \cos \omega \sin i + z \cos i = 0$$

die Gleichung der Ebene der Bahn in dem Systeme der xyz.

Den 180° nicht übersteigenden Winkel, welchen der auf der positiven Seite der Ebene der xy oder $x_1\, y_1$ liegende Theil der Hauptaxe der Bahn mit dem positiven Theile der Axe der x_1 einschliesst, wollen wir durch ϖ bezeichnen. Sind dann x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Hauptaxe der Bahn, dessen Entfernung von dem Anfange der xyz oder $x_1\, y_1\, z_1$ durch ρ bezeichnet werden mag, im Systeme der $x_1\, y_1\, z_1$; so ist offenbar mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander in völliger Allgemeinheit:

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 = \pm \rho \cos \varpi, \\ y_1 = \pm \rho \sin \varpi \cos i, \\ z_1 = \pm \rho \sin \varpi \sin i; \end{cases}$$

wenn man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, je nachdem der Punkt $(x_1\, y_1\, z_1)$ auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der xy oder $x_1\, y_1$ liegt. Also ist

$$(6) \qquad \pm \rho = \frac{x_1}{\cos \varpi} = \frac{y_1}{\sin \varpi \cos i} = \frac{z_1}{\sin \varpi \sin i};$$

und

$$(7) \qquad \frac{x_1}{\cos \varpi} = \frac{y_1}{\sin \varpi \cos i} = \frac{z_1}{\sin \varpi \sin i}$$

oder

$$(7^*) \qquad \begin{cases} y_1 = x_1 \tang \varpi \cos i. \\ z_1 = x_1 \tang \varpi \sin i \end{cases}$$

sind daher die Gleichungen der Hauptaxe der Bahn im Systeme der $x_1\, y_1\, z_1$.

Folglich sind nach (2) im Systeme der xyz die Gleichungen der Hauptaxe der Bahn:

$$(8) \qquad \begin{cases} x \sin \omega - y \cos \omega = -(x \cos \omega + y \sin \omega) \tang \varpi \cos i, \\ \qquad\qquad z = \quad (x \cos \omega + y \sin \omega) \tang \varpi \sin i. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Division:

$$(9) \qquad \tan i = -\frac{z}{x \sin\omega - y \cos\omega}$$

oder

$$(9^*) \qquad x \sin\omega \sin i - y \cos\omega \sin i + z \cos i = 0,$$

welche Gleichung nach (4*) die Bedingung ausdrückt, dass die Hauptaxe in der Ebene der Bahn liegt.

Die erste der beiden Gleichungen (8) bringt man leicht auf die Form

$$(10) \qquad \frac{x}{y} = \frac{\cos\omega - \sin\omega \tan\varpi \cos i}{\sin\omega + \cos\omega \tan\varpi \cos i}$$

oder

$$(10^*) \qquad \frac{x}{y} = \frac{\cos\omega \cos\varpi - \sin\omega \sin\varpi \cos i}{\sin\omega \cos\varpi + \cos\omega \sin\varpi \cos i}.$$

Also ist, wie man leicht findet:

$$x \cos\omega + y \sin\omega$$

$$= \frac{\cos\varpi}{\cos\omega \cos\varpi - \sin\omega \sin\varpi \cos i} x$$

$$= \frac{\cos\varpi}{\sin\omega \cos\varpi + \cos\omega \sin\varpi \cos i} y,$$

und die Gleichungen der Hauptaxe sind daher nach (8):

$$(11) \qquad \begin{cases} z = \dfrac{\sin\varpi \sin i}{\cos\omega \cos\varpi - \sin\omega \sin\varpi \cos i} x, \\ z = \dfrac{\sin\varpi \sin i}{\sin\omega \cos\varpi + \cos\omega \sin\varpi \cos i} y; \end{cases}$$

oder

$$(11^*) \qquad \frac{x}{\cos\omega \cos\varpi - \sin\omega \sin\varpi \cos i}$$

$$= \frac{y}{\sin\omega \cos\varpi + \cos\omega \sin\varpi \cos i}$$

$$= \frac{z}{\sin\varpi \sin i}.$$

Von einem Punkte in der Ebene der Bahn, dessen Coordinaten im Systeme der xyz wir durch u, v, w bezeichnen wollen, werde jetzt auf die Hauptaxe der Bahn ein Perpendikel gefällt, dessen Gleichungen

$$(12) \qquad \frac{x-u}{A} = \frac{y-v}{B} = \frac{z-w}{C}$$

sein mögen. Weil der Punkt (uvw) in der Ebene der Bahn liegt, so findet nach (4*) zwischen dessen Coordinaten u, v, w die Gleichung

$$(13)\qquad u \sin\omega \sin i - v \cos\omega \sin i + w \cos i = 0$$

Statt; und man kann also offenbar die Gleichung (4*) der Ebene der Bahn auch auf folgende Art darstellen:

$$(14)\quad (x-u)\sin\omega\sin i - (y-v)\cos\omega\sin i + (z-w)\cos i = 0.$$

Also muss, weil das durch die Gleichungen (12) charakterisirte Perpendikel in der Ebene der Bahn liegen soll, offenbar

$$(15)\qquad A\sin\omega\sin i - B\cos\omega\sin i + C\cos i = 0$$

sein. Ferner ergiebt sich nach den Lehren der analytischen Geometrie wegen der Gleichungen (11*) und (12) die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} 1 + \dfrac{\cos\omega\cos\varpi - \sin\omega\sin\varpi\cos i}{\sin\varpi\sin i}\cdot\dfrac{A}{C} \\ \quad + \dfrac{\sin\omega\cos\varpi + \cos\omega\sin\varpi\cos i}{\sin\varpi\sin i}\cdot\dfrac{B}{C} \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$(16)\qquad \left.\begin{array}{l} A(\cos\omega\cos\varpi - \sin\omega\sin\varpi\cos i) \\ + B(\sin\omega\cos\varpi + \cos\omega\sin\varpi\cos i) \\ + C\sin\varpi\sin i \end{array}\right\} = 0,$$

welche Gleichung nämlich die Bedingung ausdrückt, dass die durch die Gleichungen (12) charakterisirte gerade Linie auf der Hauptaxe der Bahn senkrecht steht.

Wenn man aus den Gleichungen (15) und (16) zuerst C, dann B eliminirt, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{l} A(\sin\omega\sin\varpi - \cos\omega\cos\varpi\cos i) \\ = B(\cos\omega\sin\varpi + \sin\omega\cos\varpi\cos i), \\ -A\cos\varpi\sin i = C(\cos\omega\sin\varpi + \sin\omega\cos\varpi\cos i); \end{array}$$

aus denen sich unmittelbar ergibt, dass

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} A = \cos\omega\sin\varpi + \sin\omega\cos\varpi\cos i, \\ B = \sin\omega\sin\varpi - \cos\omega\cos\varpi\cos i, \\ C = -\cos\varpi\sin i \end{array}\right.$$

gesetzt werden kann, so dass also die Gleichungen des von dem Punkte $(u\,v\,w)$ in der Ebene der Bahn auf deren Hauptaxe gefällten Perpendikels die folgenden sind:

$$(18)\qquad \frac{x-u}{\cos\omega\sin\varpi + \sin\omega\cos\varpi\cos i}$$

$$= \frac{y - v}{\sin\omega \sin\varpi - \cos\omega \cos\varpi \cos i}$$

$$= -\frac{z - w}{\cos\varpi \sin i}.$$

Bezeichnen jetzt x, y, z die Coordinaten des Durchschnittspunktes des von dem Punkte (uvw) auf die Hauptaxe gefällten Perpendikels mit der Hauptaxe, so müssen x, y, z aus den Gleichungen

$$\frac{x}{\cos\omega \cos\varpi - \sin\omega \sin\varpi \cos i}$$

$$= \frac{y}{\sin\omega \cos\varpi + \cos\omega \sin\varpi \cos i}$$

$$= \frac{z}{\sin\varpi \sin i}$$

und

$$\frac{x - u}{\cos\omega \sin\varpi + \sin\omega \cos\varpi \cos i}$$

$$= \frac{y - v}{\sin\omega \sin\varpi - \cos\omega \cos\varpi \cos i}$$

$$= -\frac{z - w}{\cos\varpi \sin i}$$

bestimmt werden.

Zuvörderst erhält man leicht für z die beiden folgenden Ausdrücke:

$$(19)\quad \begin{cases} z = \dfrac{\sin\varpi}{\cos\omega}\left\{u \cos\varpi \sin i + w\,(\cos\omega \sin\varpi + \sin\omega \cos\varpi \cos i)\right\}, \\ z = \dfrac{\sin\varpi}{\sin\omega}\left\{v \cos\varpi \sin i + w\,(\sin\omega \sin\varpi - \cos\omega \cos\varpi \cos i)\right\}. \end{cases}$$

Dass diese beiden Ausdrücke von z wirklich einander gleich sind, ergibt sich leicht mittelst der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$u \sin\omega \sin i - v \cos\omega \sin i + w \cos i = 0.$$

Mit Rücksicht auf diese letztere Gleichung erhält man für z leicht noch die folgenden Ausdrücke:

$$(19^*)\quad \begin{cases} z = \sin\varpi\,(u \cos\omega \cos\varpi \sin i + v \sin\omega \cos\varpi \sin i + w \sin\varpi), \\ z = -\sin\varpi \tan i\ \{(\sin\omega \sin\varpi - \cos\omega \cos\varpi \cos i)\,u - \\ \qquad (\cos\omega \sin\varpi + \sin\omega \cos\varpi \cos i)\,v\}. \end{cases}$$

Für $z-w$ erhält man aus (19) die beiden folgenden Ausdrücke:

$$(20)\quad \begin{cases} z-w = \dfrac{\cos\varpi}{\cos\omega}\Big\{u \sin\varpi \sin i - w(\cos\omega\cos\varpi - \sin\omega\sin\varpi\cos i)\Big\}, \\[2ex] z-w = \dfrac{\cos\varpi}{\sin\omega}\Big\{v \sin\varpi \sin i - w(\sin\omega\cos\varpi + \cos\omega\sin\varpi\cos i)\Big\}; \end{cases}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung

$$u \sin\omega \sin i - v \cos\omega \sin i + w \cos i = 0,$$

ferner die beiden folgenden Ausdrücke:

$$(20^*)\quad \begin{cases} z-w = \cos\varpi\,(u \cos\omega \sin\varpi \sin i + v \sin\omega \sin\varpi \sin i - w\cos\varpi) \\ z-w = \cos\varpi\,\mathrm{tang}\, i\,\{(\sin\omega\cos\varpi + \cos\omega\sin\varpi\cos i)\,u - \\ \qquad (\cos\omega\cos\varpi - \sin\omega\sin\varpi\cos i)\,v\}. \end{cases}$$

Die Grössen x, y und $x-u$, $y-v$ findet man mittelst der folgenden sich unmittelbar aus dem Obigen ergebenden Formeln:

$$(21)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\cos\omega\cos\varpi - \sin\omega\sin\varpi\cos i}{\sin\varpi\sin i}\, z, \\[2ex] y = \dfrac{\sin\omega\cos\varpi + \cos\omega\sin\varpi\cos i}{\sin\varpi\sin i}\, z \end{cases}$$

und

$$(22)\quad \begin{cases} x-u = -\dfrac{\cos\omega\sin\varpi + \sin\omega\cos\varpi\cos i}{\cos\varpi\sin i}\,(z-w), \\[2ex] y-v = -\dfrac{\sin\omega\sin\varpi - \cos\omega\cos\varpi\cos i}{\cos\varpi\sin i}\,(z-w). \end{cases}$$

Aus diesen Formeln erhält man auch sehr leicht:

$$(23)\qquad x^2+y^2+z^2 = \frac{z^2}{\sin\varpi^2\ \sin i^2}$$

und

$$(24)\qquad (x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2 = \frac{(z-w)^2}{\cos\varpi^2 \sin i^2}.$$

Die Entfernung des Punktes (xyz) von dem als Anfang der Coordinaten angenommenen Brennpunkte der Ellipse ist

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Die Entfernung des Mittelpunktes der Ellipse von ihrem als Anfang der Coordinaten angenommenen Brennpunkte, indem wir diese Entfernung als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem der Mittelpunkt der Ellipse auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der xy liegt, soll mit Rücksicht hierauf durch e bezeichnet werden.

Sei nun zuerst e positiv. Liegt dann der Punkt (xyz) auf der positiven Seite der Ebene der xy, so ist die Entfernung des Punktes (xyz) von dem Mittelpunkte der Ellipse offenbar

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}-e$$

oder

$$e-\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

jenachdem

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}>e \text{ oder } \sqrt{x^2+y^2+z^2}<e$$

ist. Liegt dagegen der Punkt (xyz) auf der negativen Seite der Ebene der xy, so ist die Entfernung des Punktes (xyz) von dem Mittelpunkte der Ellipse allgemein

$$e+\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Sei ferner e negativ. Liegt dann der Punkt (xyz) auf der positiven Seite der Ebene der xy, so ist die Entfernung des Punktes (xyz) von dem Mittelpunkte der Ellipse offenbar allgemein

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}+(-e),$$

also

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}-e.$$

Liegt dagegen der Punkt (xyz) auf der negativen Seite der Ebene der xy, so ist die Entfernung des Punktes (xyz) von dem Mittelpunkte der Ellipse

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}-(-e)$$

oder

$$(-e)-\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

also

$$e+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

oder

$$-(e+\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

jenachdem

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}>-e \text{ oder } \sqrt{x^2+y^2+z^2}<-e$$

ist.

Nimmt man alles Vorhergehende zusammen, so ergibt sich Folgendes:

Wenn der Punkt (xyz) auf der positiven Seite der Ebene der xy liegt, so ist die Entfernung des Punktes (xyz) von dem Mittelpunkte der Ellipse immer

$$\pm\,(e-\sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

Wenn der Punkt (xyz) auf der negativen Seite der Ebene der xy liegt, so ist die Entfernung des Punktes (xyz) von dem Mittelpunkte der Ellipse immer

$$\pm\,(e+\sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

Nach (23) ist nun

$$x^2+y^2+z^2=\frac{z^2}{\sin\varpi^2\,\sin i^2},$$

und folglich, weil keiner der Winkel ϖ und i grösser als 180°, also sowohl $\sin\varpi$, als auch $\sin i$ positiv ist,

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\pm\,\frac{z}{\sin\varpi\,\sin i},$$

wo man das obere oder untere Zeichen nimmt, je nachdem z positiv oder negativ ist, d. h. jenachdem der Punkt (xyz) auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der xy liegt.

Halten wir dies mit dem Vorhergehenden zusammen, so ergibt sich unmittelbar, dass die Entfernung des Punktes (xyz) von dem Mittelpunkte der Ellipse immer

$$\pm\left(e-\frac{z}{\sin\varpi\,\sin i}\right)$$

ist.

Werden nun wie gewöhnlich die grosse und kleine Halbaxe der Ellipse durch a und b bezeichnet, wo also

$$(25)\qquad e^2=a^2-b^2$$

ist, so ergibt sich, wenn nun der oben betrachtete Punkt (uvw) ein Punkt der Ellipse ist, wegen der Natur der Ellipse auf der Stelle die Gleichung

$$(26)\quad \frac{1}{a^2}\left(e-\frac{z}{\sin\varpi\,\sin i}\right)^2+\frac{(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2}{b^2}=1,$$

also nach (24) die Gleichung

$$(27)\qquad \frac{1}{a^2}\left(e-\frac{z}{\sin\varpi\,\sin i}\right)^2+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{(z-w)^2}{\cos\varpi^2\,\sin i^2}=1,$$

in welche man alle obengefundenen Ausdrücke von z und $z-w$ durch u, v, w einführen kann. Diese Gleichung nebst der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$(28)\qquad u\,\sin\omega\,\sin i-v\,\cos\omega\,\sin i+w\,\cos i=0$$

sind die allgemeinen Gleichungen der als eine Curve im Raume betrachteten elliptischen Bahn.

Der Fall, wenn $i = 0$ ist, d. h. wenn die elliptische Bahn ganz in der Ebene der xy liegt, erfordert noch eine besondere Betrachtung. In diesem Falle sei ϖ der 180^0 nicht übersteigende Winkel, welchen der auf der positiven Seite der Axe der x liegende Theil der Hauptaxe der Bahn mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst; dann ist offenbar in völliger Allgemeinheit

(29) $$y = x \, tang \, \varpi$$

die Gleichung der Hauptaxe. Ist nun $(u\,v)$ ein beliebiger Punkt in der Ebene der xy, so ist die Gleichung jeder durch denselben gehenden geraden Linie:

$$y - v = A\,(x - u).$$

Soll diese gerade Linie auf der Hauptaxe senkrecht stehen, so muss

$$1 + A \, tang \, \varpi = 0, \quad A = - \cot \varpi$$

sein, so dass also

$$y - v = -(x-u) \cot \varpi$$

die Gleichung der durch den Punkt (uv) gehenden und auf der Hauptaxe senkrecht stehenden geraden Linie ist. Ist nun (xy) der Durchschnittspunkt dieses Perpendikels mit der Hauptaxe, so müssen die Coordinaten x, y aus den beiden Gleichungen

$$y = x \, tang \, \varpi,$$
$$y - v = -(x - u) \cot \varpi$$

bestimmt werden. Mittelst leichter Rechnung erhält man aus diesen Gleichungen:

(30) $$\begin{cases} x = (u \cos \varpi + v \sin \varpi) \cos \varpi, \\ y = (u \cos \varpi + v \sin \varpi) \sin \varpi \end{cases}$$

und

(31) $$\begin{cases} x - u = -(u \sin \varpi - v \cos \varpi) \sin \varpi, \\ y - v = (u \sin \varpi - v \cos \varpi) \cos \varpi; \end{cases}$$

also:

(32) $$\begin{cases} x^2 + y^2 = (u \cos \varpi + v \sin \varpi)^2, \\ (x-u)^2 + (y - v)^2 = (u \sin \varpi - v \cos \varpi)^2. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Entfernung des Mittelpunktes der Ellipse von ihrem als Anfang der Coordinaten angenommenen Brennpunkte, indem wir diese Entfernung als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem der Mittelpunkt der Ellipse auf der positiven oder negativen Seite der Axe der x liegt, mit Rücksicht hierauf durch e, so sind allgemein $e\cos\varpi$, $e\sin\varpi$ die Coordinaten des Mittelpunktes der Ellipse, und das Quadrat der Entfernung des Punktes (xy) von dem Mittelpunkte der Ellipse ist folglich

$$(x - e\cos\varpi)^2 + (y - e\sin\varpi)^2,$$

also nach (30):

$$(u\cos\varpi + v\sin\varpi - e)^2\cos\varpi^2 + (u\cos\varpi + v\sin\varpi - e)^2\sin\varpi^2$$
$$= (u\cos\varpi + v\sin\varpi - e)^2.$$

Weil

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = (u\sin\varpi - v\cos\varpi)^2$$

das Quadrat der Entfernung des Punktes (uv) von der Hauptaxe der Ellipse ist, so ist, wenn (uv) in der Ellipse liegt, nach der Natur dieser Curve:

$$(33)\quad \left(\frac{u\cos\varpi + v\sin\varpi - e}{a}\right)^2 + \left(\frac{u\sin\varpi - v\cos\varpi}{b}\right)^2 = 1,$$

welches also die Gleichung der Ellipse im vorliegenden Falle ist.

III. Allgemeine Gleichungen einer parabolischen Bahn.

Indem wir wieder den Brennpunkt der Bahn als Anfang der xyz annehmen, werde jetzt die Entfernung des Scheitels der Parabel von ihrem Brennpunkte, indem wir dieselbe als positiv oder als negativ betrachten, je nachdem der Scheitel auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der xy liegt, durch a bezeichnet, wo also der absolute Werth von a der vierte Theil des Parameters ist.

Sei zuerst a positiv. Unter der Voraussetzung, dass der in II, worauf wir uns hier überhaupt beziehen, durch (uvw) bezeichnete Punkt der Parabel wirklich angehört, ist in diesem Falle die Entfernung des dort durch (xyz) bezeichneten Punktes von dem Scheitel der Parabel offenbar

$$a - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

oder

$$a + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

je nachdem der Punkt (xyz) auf der positiven oder auf der negativen Seite der Ebene der xy liegt.

Sei ferner a negativ. Unter der Voraussetzung, dass der Punkt $(u\ v\ w)$ der Parabel wirklich angehört, ist in diesem Falle die Entfernung des Punktes $(x\ y\ z)$ von dem Scheitel der Parabel

$$(-a) + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

oder

$$(-a) - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

also

$$-(a - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

oder

$$-(a + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

je nachdem der Punkt $(x\ y\ z)$ auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der $x\ y$ liegt.

Nun ist aber nach II, indem w, ϖ, i ihre dortigen Bedeutungen auch jetzt unverändert beibehalten,

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \pm \frac{z}{\sin\varpi \sin i},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, je nachdem der Punkt (xyz) auf der positiven oder auf der negativen Seite der Ebene der xy liegt.

Liegt also der Punkt (xyz) auf der positiven Seite der Ebene der xy, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\pm\left(a - \frac{z}{\sin\varpi \sin i}\right),$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, je nachdem a positiv oder negativ ist, die Entfernung des Punktes (xyz) von dem Scheitel der Parabel.

Liegt der Punkt (xyz) auf der negativen Seite der Ebene der xy, so ist nach dem Vorhergehenden wieder

$$\pm\left(a - \frac{z}{\sin\varpi \sin i}\right),$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, je nachdem a positiv oder negativ ist, die Entfernung des Punktes (xyz) von dem Scheitel der Parabel.

Also ist allgemein die Entfernung des Punktes (xyz) von dem Scheitel der Parabel

$$\pm\left(a - \frac{z}{\sin\varpi \sin i}\right),$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, je nachdem a positiv oder negativ ist.

Bezeichnen wir nun den Parameter der Parabel durch p, so ist nach der Natur der Parabel

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = \pm\, p\left(a - \frac{z}{sin\,\varpi\; sin\, i}\right),$$

das obere oder untere Zeichen genommen, je nachdem a positiv oder negativ ist; es ist aber mit derselben Bestimmung wegen des Zeichens $p = \pm\, 4\, a$, also $\pm\, p = 4a$, und folglich nach dem Obigen allgemein:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = 4\,a\left(a - \frac{z}{sin\,\varpi\; sin\, i}\right).$$

also, weil nach II. (24)

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = \frac{(z-w)^2}{cos\,\varpi^2\; sin\, i^2}$$

ist:

$$\frac{(z-w)^2}{cos\,\varpi^2\; sin\, i^2} = 4\,a\left(a - \frac{z}{sin\,\varpi\; sin\, i}\right)$$

oder:

$$(1) \qquad (z-w)^2 = 4a\, cos\,\varpi^2\, sin\, i^2\left(a - \frac{z}{sin\,\varpi\; sin\, i}\right)$$

wo man für z und $z-w$ alle aus II. bekannten Ausdrücke dieser Grössen durch u, v, w setzen kann. Vorstehende Gleichung nebst der aus II. bekannten Gleichung

$$(2) \qquad u\; sin\,\omega\; sin\, i - v\; cos\,\omega\; sin\, i + w\; cos\, i = 0$$

sind die allgemeinen Gleichungen der als eine Curve im Raume betrachteten parabolischen Bahn.

Betrachtet man den Parameter p der Parabel als positiv oder als negativ, je nachdem der Scheitel derselben auf der positiven oder negativen Seite der Ebene der xy liegt, so ist allgemein $a = \frac{1}{4}\, p$;

also nach (1):

$$(3) \qquad (z-w)^2 = p\; cos\,\varpi^2\, sin\, i^2\left(\frac{1}{4}\,p - \frac{z}{sin\,\varpi\; sin\, i}\right)$$

oder

$$(3^*) \qquad (z-w)^2 = \frac{1}{4}\,p\; cos\,\varpi^2\, sin\, i^2\left(p - \frac{4\,z}{sin\,\varpi\; sin\, i}\right).$$

Liegt die Bahn ganz in der Ebene der xy, so wollen wir auf ähnliche Art wie in II. durch ϖ den 180^0 nicht übersteigenden Winkel bezeichnen, welchen der auf der positiven Seite der Axe der x liegende Theil der Axe der Parabel mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst; die Entfernung des Scheitels der Parabel von ihrem Brennpunkte oder dem Anfange der Coordinaten, indem man diese Entfernung als positiv oder als negativ betrachtet, je nachdem der Scheitel auf der positiven oder negativen Seite der Axe der x liegt, soll aber durch a bezeichnet werden. Ist dann (uv) ein beliebiger Punkt in der Ebene der xy, und sind x, y die Coordinaten des Fusspunktes des von dem Punkte (uv) auf die Axe der Parabel gefällten Perpendikels, so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten offenbar $u \cos \varpi + v \sin \varpi$ die Entfernung des Punktes (xy) von dem Anfange der Coordinaten, wenn man diese Entfernung als positiv oder als negativ betrachtet, je nachdem der Punkt (xy) auf der positiven oder negativen Seite der Axe der x liegt. Hieraus ergibt sich mittelst einer einfachen Betrachtung, dass

$$\pm \{ a - (u \cos \varpi + v \sin \varpi) \},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, je nachdem a positiv oder negativ ist, die Entfernung des Punktes (xy) von dem Scheitel der Parabel ist. Also ist, mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens, wenn (uv) ein Punkt der Parabel ist und p deren Parameter bezeichnet, nach der Natur der Parabel:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = \pm p \{ a - (u \cos \varpi + v \sin \varpi) \},$$

und folglich, weil $\pm p = 4a$ ist:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = 4a \{ a - (u \cos \varpi + v \sin \varpi) \}.$$

Ganz wie in II, ist aber

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = (u \sin \varpi - v \cos \varpi)^2,$$

folglich

$$(4) \quad (u \sin \varpi - v \cos \varpi)^2 = 4a \{ a - (u \cos \varpi + v \sin \varpi) \}$$

die Gleichung der Parabel im vorliegenden Falle.

Betrachtet man den Parameter p als positiv oder negativ, je nachdem der Scheitel der Parabel auf der positiven oder negativen Seite der Axe der x liegt, so ist $a = \frac{1}{4} p$, also nach (4)

$$(5) \quad (u \sin \varpi - v \cos \varpi)^2 = p \{ \tfrac{1}{4} p - (u \cos \varpi + v \sin \varpi) \}$$

oder

$$(5^*) \quad (u \sin \varpi - v \cos \varpi)^2 = \tfrac{1}{4} p \{ p - 4 (u \cos \varpi + v \sin \varpi) \}.$$

IV. Proximitäten zweier elliptischen Bahnen, die einen Brennpunkt mit einander gemein haben.

Wir werden im Folgenden für beide Bahnen gleichbedeutende Grössen immer mit denselben Buchstaben, die nur für die eine der beiden Bahnen mit unteren Accenten, welche bei der anderen Bahn wegbleiben, versehen werden, bezeichnen; übrigens behalten alle in II gebrauchten Symbole ganz dieselbe Bedeutung wie dort, welche wir daher hier nicht wieder von Neuem angeben werden [1].

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$(1)\quad \begin{cases} \cos\theta = \sin\omega\sin\varpi - \cos\omega\cos\varpi\cos i, \\ \cos\tau = \cos\omega\sin\varpi + \sin\omega\cos\varpi\cos i, \\ \cos\Theta = \sin\omega\cos\varpi + \cos\omega\sin\varpi\cos i, \\ \cos\Sigma = \cos\omega\cos\varpi - \sin\omega\sin\varpi\cos i, \end{cases}$$

so erhalten wir nach II. (19), (19 *) und II. (20), (20 *) für z und $z-w$ die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}(2)\quad z &= -\sin\varpi\,\tan g\, i\,(u\cos\theta - v\cos\tau) \\ &= \frac{\sin\varpi}{\cos\omega}(u\cos\varpi\sin i + w\cos\tau) \\ &= \frac{\sin\varpi}{\sin\omega}(v\cos\varpi\sin i + w\cos\theta) \\ &= \sin\varpi\,(u\cos\omega\cos\varpi\sin i + v\sin\omega\cos\varpi\sin i + \\ &\qquad + w\sin\varpi)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(3)\quad z-w &= \cos\varpi\,\tan g\, i\,(u\cos\Theta - v\cos\Sigma) \\ &= \frac{\cos\varpi}{\cos\omega}(u\sin\varpi\sin i - w\cos\Sigma) \\ &= \frac{\cos\varpi}{\cos\omega}(v\sin\varpi\sin i - w\cos\Theta) \\ &= \cos\varpi\,(u\cos\omega\sin\varpi\sin i + v\sin\omega\sin\varpi\sin i \\ &\qquad - w\cos\varpi).\end{aligned}$$

Hieraus erhält man leicht:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{du} &= -\sin\varpi\,\tan g\, i\left(\cos\Theta - \cos\tau\frac{dv}{du}\right) \\ &= \frac{\sin\varpi}{\cos\omega}\left(\cos\varpi\sin i + \cos\tau\frac{dw}{du}\right).\end{aligned}$$

---

[1]) Natürlich haben die mit unteren Accenten versehenen Buchstaben hier eine andere Bedeutung als die mit unteren Accenten versehenen Buchstaben in II.

$$\frac{d\,(z-w)}{du} = \cos\varpi\ \operatorname{tang} i\left(\cos\Theta - \cos\mathfrak{T}\,\frac{dv}{du}\right)$$
$$= \frac{\cos\varpi}{\cos\omega}\left(\sin\varpi\ \sin i\ - \cos\mathfrak{T}\,\frac{dw}{du}\right);$$

und weil nun wegen der aus II. (27) bekannten Gleichung

$$\frac{1}{a^2}\left(c - \frac{z}{\sin\varpi\,\sin i}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\cdot\frac{(z-w)^2}{\cos\varpi^2\,\sin i^2} = 1\,,$$

wie man leicht findet,

$$\frac{1}{a^2\,\sin\varpi}\left(e\ \sin\ i\ - \frac{z}{\sin\varpi}\right)\frac{dz}{du} = \frac{1}{b^2\cos\varpi^2}\left(z - w\right)\frac{d\,(z-w)}{du}$$

ist, so erhält man durch Substitution der obigen Ausdrücke von

$$\frac{dz}{du}\ \text{und}\ \frac{d\,(z-w)}{du}$$

in diese Gleichung leicht die folgenden Formeln:

$$(4)\left\{\begin{aligned}
\frac{dv}{du} &= \frac{\dfrac{1}{a^2\,\sin\varpi}(e\sin\varpi\sin i - z)\cos\Theta + \dfrac{1}{b^2\,\cos\varpi}(z-w)\cos\Theta}{\dfrac{1}{a^2\,\sin\varpi}(e\sin\varpi\sin i - z)\cos\tau + \dfrac{1}{b^2\,\cos\varpi}(z-w)\cos\mathfrak{T}}\\
\frac{dw}{du} &= -\sin i\,\frac{\dfrac{1}{a^2\,\sin\varpi}(e\sin\varpi\sin i - z)\cos\varpi - \dfrac{1}{b^2\,\cos\varpi}(z-w)\sin\varpi}{\dfrac{1}{a^2\,\sin\varpi}(e\sin\varpi\sin i - z)\cos\tau + \dfrac{1}{b^2\,\cos\varpi}(z-w)\cos\mathfrak{T}}
\end{aligned}\right.$$

Nach II. (28) haben wir auch die Gleichung

$$u\ \sin\omega\ \sin\ i\ - v\ \cos\omega\ \sin\ i + w\ \cos\ i = 0,$$

aus der sich

$$\sin\omega\ \sin i\ - \cos\omega\ \sin\ i\ \frac{dv}{du} + \cos i\ \frac{dw}{du} = 0$$

ergibt; führt man in diese Gleichung die Ausdrücke (4) von

$$\frac{dv}{du}\ \text{und}\ \frac{dw}{du}$$

ein, so findet sich dieselbe, mit Rücksicht darauf, dass wie sich aus (1) mittelst leichter Rechnung ergibt,

$$\sin i\ (\cos\omega\ \cos\theta + \cos i\ \cos\varpi) = \sin i\ \sin\omega\ \cos\tau,$$
$$\sin i\ (\cos\omega\ \cos\Theta - \cos i\ \sin\varpi) = \sin i\ \sin\omega\ \cos\mathfrak{T}$$

ist, vollständig erfüllt, woraus die Richtigkeit der Ausdrücke (4) erhellet.

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$(5)\qquad \mathfrak{z} = z - w,\ w = z - \mathfrak{z},$$

so haben wir nach II. (19 *), (20 *) die Gleichungen

$$z = \sin\varpi\,(u\cos\omega\cos\varpi\sin i + v\sin\omega\cos\varpi\sin i + w\sin\varpi),$$

$$= \cos\varpi\,(u\cos\omega\sin\varpi\sin i + v\sin\omega\sin\varpi\sin i - w\cos\varpi);$$

aus denen sich durch Elimination von w leicht

$$(u\cos\omega + v\sin\omega)\sin i = \frac{z\cos\varpi^2 + \mathfrak{z}\sin\varpi^2}{\sin\varpi\cos\varpi}$$

ergibt. Verbindet man hiermit die aus der Gleichung II. (28) sogleich folgende Gleichung

$$(u\sin\omega - v\cos\omega)\sin i = -w\cos i = (\mathfrak{z} - z)\cos i$$

und bestimmt dann u, v, w durch z, $\mathfrak{z}$, so erhält man mittelst leichter Rechnung die folgenden bemerkenswerthen Ausdrücke:

$$(6)\qquad \begin{cases} u = \left(z\dfrac{\cos\mathfrak{T}}{\sin\varpi} + \mathfrak{z}\dfrac{\cos\tau}{\cos\varpi}\right)\operatorname{cosec} i, \\ v = \left(z\dfrac{\cos\Theta}{\sin\varpi} + \mathfrak{z}\dfrac{\cos\Theta}{\cos\varpi}\right)\operatorname{cosec} i, \\ w = z - \mathfrak{z}. \end{cases}$$

Setzen wir aber grösserer Einfachheit wegen noch

$$(7)\qquad Z = e - \frac{z}{\sin\varpi\sin i},\quad \mathfrak{Z} = \frac{z - w}{\cos\varpi\sin i},$$

so werden vorstehende Ausdrücke:

$$(8)\qquad \begin{cases} u = (e - Z)\cos\mathfrak{T} + \mathfrak{Z}\cos\tau, \\ v = (e - Z)\cos\Theta + \mathfrak{Z}\cos\theta, \\ w = \{(e - Z)\sin\varpi - \mathfrak{Z}\cos\varpi\}\sin i; \end{cases}$$

und für die andere Bahn ist für

$$(7\,{*})\qquad Z_1 = e_1 - \frac{z_1}{\sin\varpi_1\sin i_1},\quad \mathfrak{Z}_1 = \frac{z_1 - w_1}{\cos\varpi_1\sin i_1}$$

natürlich in ganz ähnlicher Weise:

$$(8\,{*})\qquad \begin{cases} u_1 = (e_1 - Z_1)\cos\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{Z}_1\cos\tau_1, \\ v_1 = (e_1 - Z_1)\cos\Theta_1 + \mathfrak{Z}_1\cos\theta_1, \\ w_1 = \{(e_1 - Z_1)\sin\varpi_1 - \mathfrak{Z}_1\cos\varpi_1\}\sin i_1. \end{cases}$$

Nach II. (27) und den beiden vorhergehenden Gleichungen (7) und (7 *) hat man nun zunächst die beiden folgenden Gleichungen:

$$(9)\qquad \left(\frac{Z}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Z}}{b}\right)^2 = 1,\quad \left(\frac{Z_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Z}_1}{b_1}\right)^2 = 1.$$

Ferner muss nach I. (16)

$$u - u_1 + (v - v_1)\frac{dv}{du} + (w - w_1)\frac{dw}{du} = 0,$$

$$u - u_1 + (v - v_1)\frac{dv_1}{du_1} + (w - w_1)\frac{dw_1}{du_1} = 0$$

sein. Diese Gleichungen führen mittelst (4) sehr leicht zu den beiden folgenden Gleichungen:

$$0 = \frac{Z}{a^2}\left\{(u-u_1)\cos\tau + (v-v_1)\cos\theta - (w-w_1)\cos\varpi\,\sin i\right\}$$
$$+\frac{\mathfrak{Z}}{b^2}\left\{(u-u_1)\cos\mathfrak{T} + (v-v_1)\cos\Theta + (w-w_1)\sin\varpi\,\sin i\right\},$$
$$0 = \frac{Z_1}{a_1^{\,2}}\left\{(u-u_1)\cos\tau_1 + (v-v_1)\cos\theta_1 - (w-w_1)\cos\varpi_1\,\sin i_1\right\}$$
$$+\frac{\mathfrak{Z}_1}{b_1^{\,2}}\left\{(u-u_1)\cos\mathfrak{T}_1 + (v-v_1)\cos\Theta_1 + (w-w_1)\sin\varpi_1\,\sin i_1\right\};$$

und führt man nun in diese Gleichungen für u, v, w und u_1, v_1, w_1 ihre Werthe aus (8) und (8 *) ein, so erhält man:

$$0=\frac{Z}{a^2}\left(\begin{array}{l}(e-Z)(\cos\tau\cos\mathfrak{T}+\cos\theta\cos\Theta-\sin\varpi\cos\varpi\sin i^2)\\ \quad+\mathfrak{Z}\ (\cos\tau\cos\tau+\cos\theta\cos\theta+\cos\varpi\cos\varpi\sin i^2)\\ -(e_1-Z_1)(\cos\tau\cos\mathfrak{T}_1+\cos\theta\cos\Theta_1-\cos\varpi\sin\varpi_1\sin i\sin i_1)\\ \quad-\mathfrak{Z}_1\ (\cos\tau\cos\tau_1+\cos\theta\cos\theta_1+\cos\varpi\cos\varpi_1\sin i\sin i_1)\end{array}\right)$$
$$+\frac{\mathfrak{Z}}{b^2}\left(\begin{array}{l}(e-Z)(\cos\mathfrak{T}\cos\mathfrak{T}+\cos\Theta\cos\Theta+\sin\varpi\sin\varpi\sin i^2)\\ \quad+\mathfrak{Z}\ (\cos\tau\cos\mathfrak{T}+\cos\theta\cos\Theta-\sin\varpi\cos\varpi\sin i^2)\\ -(e_1-Z_1)(\cos\mathfrak{T}\cos\mathfrak{T}_1+\cos\Theta\cos\Theta_1+\sin\varpi\sin\varpi_1\sin i\sin i_1)\\ \quad-\mathfrak{Z}_1\ (\cos\mathfrak{T}\cos\tau_1+\cos\Theta\cos\theta_1-\sin\varpi\cos\varpi_1\sin i\sin i_1)\end{array}\right)$$
$$0=\frac{Z_1}{a_1^{\,2}}\left(\begin{array}{l}(e-Z)(\cos\mathfrak{T}\cos\tau_1+\cos\Theta\cos\theta_1-\sin\varpi\cos\varpi_1\sin i\sin i_1)\\ \quad+\mathfrak{Z}\ (\cos\tau\cos\tau_1+\cos\theta\cos\theta_1+\cos\varpi\cos\varpi_1\sin i\sin i_1)\\ -(e_1-Z_1)(\cos\tau_1\cos\mathfrak{T}_1+\cos\theta_1\cos\Theta_1-\sin\varpi_1\cos\varpi_1\sin i_1^{\,2})\\ \quad-\mathfrak{Z}_1\ (\cos\tau_1\cos\tau_1+\cos\theta_1\cos\theta_1+\cos\varpi_1\cos\varpi_1\sin i_1^{\,2})\end{array}\right)$$
$$+\frac{\mathfrak{Z}_1}{b_1^{\,2}}\left(\begin{array}{l}(e-Z)(\cos\mathfrak{T}\cos\mathfrak{T}_1+\cos\Theta\cos\Theta_1+\sin\varpi\sin\varpi_1\sin i\sin\\ \quad+\mathfrak{Z}\ (\cos\tau\cos\mathfrak{T}_1+\cos\theta\cos\Theta_1-\cos\varpi\sin\varpi_1\sin i\sin i_1)\\ -(e_1-Z_1)(\cos\mathfrak{T}_1\cos\mathfrak{T}_1+\cos\Theta_1\cos\Theta_1+\sin\varpi_1\sin\varpi_1\sin i_1^{\,2})\\ \quad-\mathfrak{Z}_1\ (\cos\tau_1\cos\mathfrak{T}_1+\cos\theta_1\cos\Theta_1-\sin\varpi_1\cos\varpi_1\sin i_1^{\,2})\end{array}\right).$$

Sehr leicht überzeugt man sich aber von der Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

$$\cos\tau\ \cos\mathfrak{T} + \cos\theta\ \cos\Theta - \sin\varpi\ \cos\varpi\ \sin i^{\,2} = 0,$$
$$\cos\tau_1\cos\mathfrak{T}_1 + \cos\theta_1\cos\Theta_1 - \sin\varpi_1\cos\varpi_1\sin i_1^{\,2} = 0;$$
$$\cos\tau\ \cos\tau + \cos\theta\ \cos\theta + \cos\varpi\ \cos\varpi\ \sin i^{\,2} = 1,$$
$$\cos\tau_1\cos\tau_1 + \cos\theta_1\cos\theta_1 + \cos\varpi_1\cos\varpi_1\sin i_1^{\,2} = 1;$$
$$\cos\mathfrak{T}\ \cos\mathfrak{T} + \cos\Theta\ \cos\Theta + \sin\varpi\ \sin\varpi\ \sin i^{\,2} = 1,$$
$$\cos\mathfrak{T}_1\cos\mathfrak{T}_1 + \cos\Theta_1\cos\Theta_1 + \sin\varpi_1\sin\varpi_1\sin i_1^{\,2} = 1;$$

und setzt man dann der Kürze wegen:

$$\begin{array}{ll} & A = \cos\tau\ \cos\mathfrak{T}_1 + \cos\theta\ \cos\Theta_1 - \cos\varpi\sin\varpi_1\sin i\sin i_1\\ (10) & \quad = \cos(\omega-\omega_1)(\sin\varpi\cos\varpi_1 - \cos\varpi\sin\varpi_1\cos i\cos i_1)\\ & \quad + \sin(\omega-\omega_1)(\cos\varpi\cos\varpi_1\cos i + \sin\varpi\sin\varpi_1\cos i_1)\\ & \quad - \cos\varpi\sin\varpi_1\sin i\sin i_1,\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
B = &\quad \cos\tau\ \cos\tau_1 + \cos\theta\ \cos\theta_1 + \cos\varpi \cos\varpi_1 \sin i \sin i_1 \\
= &\quad \cos\ (\omega-\omega_1)\ (\sin\varpi\ \sin\varpi_1 + \cos\varpi \cos\varpi_1 \cos i \cos i_1) \\
&+ \sin\ (\omega-\omega_1)\ (\cos\varpi \sin\varpi_1 \cos i - \sin\varpi \cos\varpi_1 \cos i_1) \\
&+ \cos\varpi\ \cos\varpi_1\ \sin i \sin i_1, \\
C = &\quad \cos\mathfrak{T}\ \cos\mathfrak{T}_1 + \cos\Theta\ \cos\Theta_1 + \sin\varpi \sin\varpi_1 \sin i \sin i_1 \\
= &\quad \cos\ (\omega-\omega_1)\ (\cos\varpi \cos\varpi_1 + \sin\varpi \sin\varpi_1 \cos i \cos i_1) \\
&- \sin\ (\omega-\omega_1)\ (\sin\varpi \cos\varpi_1 \cos i - \cos\varpi \sin\varpi_1 \cos i_1) \\
&+ \sin\varpi \sin\varpi_1 \sin i \sin i_1, \\
D = &\quad \cos\mathfrak{T} \cos\tau_1 + \cos\Theta\ \cos\theta_1 - \sin\varpi \cos\varpi_1 \sin i \sin i_1 \\
= &\quad \cos\ (\omega-\omega_1)\ (\cos\varpi\ \sin\varpi_1 - \sin\varpi \cos\varpi_1 \cos i \cos i_1) \\
&- \sin\ (\omega-\omega_1)\ (\sin\varpi\ \sin\varpi_1 \cos i + \cos\varpi \cos\varpi_1 \cos i_1) \\
&- \sin\varpi \cos\varpi_1 \sin i \sin i_1,
\end{aligned}
$$

so werden die beiden obigen Gleichungen:

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{Z}{a^2}\Big\{\mathfrak{Z}-A\ (e_1-Z_1) - B\mathfrak{Z}_1\Big\} + \\
&\qquad + \frac{\mathfrak{Z}}{b_2}\Big\{(e-Z)-C\ (e_1-Z_1)-D\mathfrak{Z}_1\Big\} = 0, \\
&\frac{Z_1}{a_1{}^2}\Big\{D\ (e-Z) + B\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1\Big\} + \\
&\qquad + \frac{\mathfrak{Z}_1}{b_1{}^2}\Big\{C\,(e-Z) + A\mathfrak{Z} - (e_1-Z_1)\Big\} = 0;
\end{aligned}
\right.
$$

und zur Bestimmung der vier Grössen Z, $\mathfrak{Z}$, Z_1, $\mathfrak{Z}_1$ haben wir daher nach (9) und (11) die vier folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
(12)\qquad &\left(\frac{Z}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Z}}{b}\right)^2 = 1\ ,\ \left(\frac{Z_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Z}_1}{b_1}\right)^2 = 1\,; \\
&\frac{Z}{a^2}\Big\{\mathfrak{Z}-A\ (e_1-Z_1) - B\mathfrak{Z}_1\Big\} + \\
&\qquad + \frac{\mathfrak{Z}}{b^2}\Big\{(e-Z)-C\,(e_1-Z_1)-D\mathfrak{Z}_1\Big\} = 0, \\
&\frac{Z_1}{a_1{}^2}\Big\{D\ (e-Z) + B\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1\Big\} + \\
&\qquad + \frac{Z_1}{b_1{}^2}\Big\{C\ (e-Z)+A\mathfrak{Z} - (e_1-Z_1)\Big\} = 0.
\end{aligned}
$$

Hat man Z, $\mathfrak{Z}$; Z_1, $\mathfrak{Z}_1$ mittelst dieser Gleichungen gefunden, so ergeben sich u, v, w; u_1, v_1, w_1 mittelst der Formeln (8) und (8*).

Zwischen den Grössen A, B, C, D existiren verschiedene bemerkenswerthe Relationen, deren man sich bedienen kann, um, wenn man die in Rede stehenden Grössen berechnet hat, die Richtigkeit der Rechnung zu prüfen; unter diesen verschiedenen Relationen wollen wir hier jedoch nur auf die folgenden aufmerksam machen:

$$
\begin{aligned}
(13)\qquad &A \sin\varpi \cos\varpi_1 + B \sin\varpi \sin\varpi_1 + \\
&\quad + C \cos\varpi \cos\varpi_1 + D \cos\varpi \sin\varpi_1 = \cos\ (\omega-\omega_1)
\end{aligned}
$$

oder

$$
(14)\quad \left.\begin{array}{l}
(A\cos\varpi_1+B\sin\varpi_1)\sin\varpi+\\
\qquad+(C\cos\varpi_1+D\sin\varpi_1)\cos\varpi\\
(B\sin\varpi+D\cos\varpi)\sin\varpi_1+\\
\qquad+(A\sin\varpi+C\cos\varpi)\cos\varpi_1
\end{array}\right\}=\cos(\omega-\omega_1);
$$

ferner:

$$
(15)\quad \begin{array}{l}
(A+D)\cos(\varpi+\varpi_1)+(B-C)\sin(\varpi+\varpi_1)=\\
\qquad-2\sin\omega-\omega_1)\sin\frac{1}{2}(i-i_1)\sin\frac{1}{2}(i+i_1),\\
(A-D)\cos(\varpi-\varpi_1)-(B+C)\sin(\varpi-\varpi_1)=\\
\qquad-2\sin(\omega-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(i-i_1)\cos\frac{1}{2}(i+i_1).
\end{array}
$$

Alles kommt nun auf die Auflösung der vier Gleichungen (12) an; aber so einfach diese Gleichungen auch an sich zu sein scheinen, so führt ihre vollständige Auflösung doch in grosse Verwickelung und man gelangt dadurch zu einer Gleichung, deren Auflösung die Kräfte der Algebra weit übersteigt. Es bleibt daher nichts Anderes übrig, als diese Gleichungen auf dem Wege der successiven Annäherung aufzulösen, wozu wir jetzt die uns am zweckmässigsten scheinende Methode angeben wollen.

Setzen wir der Kürze wegen

$$
(16)\qquad U=\frac{Z}{a},\ V=\frac{\mathfrak{Z}}{b};\ U_1=\frac{Z}{a_1},\ V_1=\frac{\mathfrak{Z}_1}{b_1};
$$

so werden unsere Gleichungen:

$$
U^2+V^2=1,\quad U_1^2+V_1^2=1;
$$

$$
\begin{aligned}
0&=\frac{U}{a}\left\{bV-A(e_1-a_1U_1)-Bb_1V_1\right\}\\
&\quad+\frac{V}{b}\left\{(e-aU)-C(e_1-a_1U_1)-Db_1V_1\right\},\\
0&=\frac{U_1}{a_1}\left\{D(e-aU)+BbV-b_1V_1\right\}\\
&\quad+\frac{V_1}{b_1}\left\{C(e-aU)+AbV-(e_1-a_1U_1)\right\};
\end{aligned}
$$

also, wenn wir

$$
(17)\quad \left\{\begin{array}{l}
\varepsilon=\dfrac{e}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2},\\[2ex]
\varepsilon_1=\dfrac{e_1}{a_1}=\dfrac{\sqrt{a_1^2-b_1^2}}{a_1}=\sqrt{1-\left(\dfrac{b_1}{a_1}\right)^2}
\end{array}\right.
$$

setzen:

$$U^2+V^2=1,\ U_1{}^2+V_1{}^2=1\,;$$

$$0=\frac{U}{a}\left\{bV-Aa_1\ (\varepsilon_1-U_1)-Bb_1\ V_1\right\}$$
$$+\frac{V}{b}\left\{a(\varepsilon-U)-Ca_1\ (\varepsilon_1-U_1)-Db_1\ V_1\right\},$$
$$0=\frac{U_1}{a_1}\left\{Da\ (\varepsilon-U)+BbV-b_1\ V_1\right\}$$
$$+\frac{V_1}{b_1}\left\{Ca\ (\varepsilon-U)+AbV-a_1\ (\varepsilon_1-U_1)\right\};$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$(18)\qquad W=\varepsilon-U,\ W_1=\varepsilon_1-U_1$$

gesetzt wird:

$$U^2+V^2=1,\quad U_1{}^2+V_1{}^2=1;$$

$$0=\frac{\varepsilon-W}{a}\ (bV-Aa_1\ W_1-Bb_1\ V_1)$$
$$+\frac{V}{b}(aW-Ca_1\ W_1-Db_1\ V_1)$$
$$0=\frac{\varepsilon_1-W_1}{a_1}\ (DaW+BbV-b_1\ V_1)$$
$$+\frac{V_1}{b_1}\ (CaW+AbV-a_1\ W_1.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man:

$$V_1=\frac{\left(\frac{b}{a}\ V-\frac{a_1}{a}\ AW_1\right)\ (\varepsilon-W)\ +\ \left(\frac{a}{b}\ W-\frac{a_1}{b}\ CW_1\right)V}{\frac{b_1}{a}\ B\ (\varepsilon-W)\ +\frac{b_1}{b}\ DV}$$

$$V_1=\frac{\left(\frac{a}{a_1}\ DW+\frac{b}{a_1}\ BV\right)(\varepsilon_1-W_1)}{\frac{b_1}{a_1}\ (\varepsilon_1-W_1)-\left(\frac{a}{b_1}\ CW+\frac{b}{b_1}\ AV-\frac{a_1}{b_1}\ W_1\right)}$$

oder, wenn man

$$F=\quad\frac{b}{a}\ V\ (\varepsilon-W)+\frac{a}{b}\ VW,$$
$$G=-\frac{a_1}{a}\ A\ (\varepsilon-W)-\frac{a_1}{b}\ CV,$$
$$H=\quad\frac{b_1}{a}\ B\ (\varepsilon-W)+\frac{b_1}{b}\ DV;$$
$$J=\quad\varepsilon_1\left(\frac{a}{a_1}\ DW+\frac{b}{a_1}\ BV\right),$$

$$K = -\left(\frac{a}{a_1} DW + \frac{b}{a_1} BV\right),$$
$$L = \frac{b_1}{a_1}\varepsilon_1 - \left(\frac{a}{b_1} CW + \frac{b}{b_1} AV\right),$$
$$M = \frac{a_1}{b_1} - \frac{b_1}{a_1}$$

setzt:

(19) $$V_1 = \frac{F + G\,W_1}{H}, \quad V_1 = \frac{J + KW_1}{L + MW_1};$$

woraus sich die Gleichung

$$\frac{F + G\,W_1}{H} = \frac{J + KW_1}{L + MW_1},$$

also nach gehöriger Entwickelung die Gleichung

(20) $$G\,M\,W_1^2 + (FM + GL - HK)\,W_1 + FL - H\,J = 0$$

ergibt.

Die obigen Ausdrücke von F, G, H, J, K, L, M bringt man leicht auf die folgende Form:

(21) $$\left\{\begin{aligned}
F &= \left\{(\varepsilon - W)\sqrt{1-\varepsilon^2} + \frac{W}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right\} V,\\
G &= -\frac{a_1}{a}\left\{A(\varepsilon - W) + \frac{CV}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right\},\\
H &= \frac{a_1}{a}\left\{B(\varepsilon - W) + \frac{DV}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right\}\sqrt{1-\varepsilon_1^2};\\
J &= \varepsilon_1 \frac{a}{a_1}\left\{DW + BV\sqrt{1-\varepsilon^2}\right\} = -\varepsilon_1 K,\\
K &= -\frac{a}{a_1}\left\{DW + BV\sqrt{1-\varepsilon^2}\right\} = -\frac{J}{\varepsilon_1},\\
L &= \varepsilon_1\sqrt{1-\varepsilon_1^2} - \frac{a}{a_1}\cdot\frac{CW + AV\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}},\\
M &= \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}} - \sqrt{1-\varepsilon_1^2} = \frac{\varepsilon_1^2}{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}};
\end{aligned}\right.$$

und bedient sich nun der vorhergehenden Formeln auf folgende Art

Wegen der Gleichung

$$U^2 + V^2 = 1$$

liegt U zwischen den Grenzen -1 und $+1$. Man muss also das Intervall zwischen -1 und $+1$ in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilen, und die dadurch erhaltenen numerischen Werthe nach und nach für U setzen, worauf man die entsprechenden Werthe von W mittelst der Formel

$$W = \varepsilon - U,$$

und die entsprechenden Werthe von V mittelst der Formel

$$V = \pm \sqrt{1 - U^2} = \pm \sqrt{(1-U)(1+U)}$$

findet. Dann kann man die entsprechenden Werthe von F, G, H, J, K, L, M mittelst der Formeln (21) berechnen, und die entsprechenden Werthe von W_1 erhält man hierauf durch Auflösung der quadratischen Gleichung (20). Die entsprechenden Werthe von V_1 werden endlich mittelst einer der beiden Formeln

$$V_1 = \frac{F + G W_1}{H}, \quad V_1 = \frac{J + K W_1}{L + M W_1}$$

erhalten. Die gefundenen Werthe von W_1 und V_1 setzt man nun, nachdem man noch U_1 mittelst der Formel

$$U_1 = \varepsilon_1 - W_1$$

berechnet hat, in die Gleichung

$$U_1^2 + V_1^2 = 1,$$

und untersucht, in wie weit dieselbe erfüllt ist. Eigentlich berechnet man die Werthe der Function

$$U_1^2 + V_1^2 - 1,$$

die zum Verschwinden gebracht werden muss, und beurtheilt aus den Zeichenwechseln dieser Werthe in bekannter Weise die engeren Grenzen, zwischen denen U liegen muss. Eine weitere Erläuterung bedarf dieses allgemein bekannte Verfahren der successiven Annäherung hier nicht; es genügt, gezeigt zu haben, dass man durch das Obige immer alle Werthe, die U haben kann, mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit auf einem völlig sichern Wege zu berechnen im Stande ist.

Bemerkt zu werden verdient auch noch Folgendes.

Wegen der Gleichungen

$$\left(\frac{Z}{a}\right) + \left(\frac{\mathfrak{Z}}{b}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{Z_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Z}_1}{b_1}\right)^2 = 1$$

kann man

$$(22) \quad \frac{Z}{a} = \cos \Omega, \quad \frac{\mathfrak{Z}}{b} = \sin \Omega; \quad \frac{Z_1}{a_1} = \cos \Omega_1, \quad \frac{\mathfrak{Z}_1}{b_1} = \sin \Omega_1 :$$

also

$$Z = a \cos \Omega, \; \mathfrak{Z} = b \sin \Omega; \; Z_1 = a_1 \cos \Omega_1, \; \mathfrak{Z}_1 = b_1 \sin \Omega_1$$

setzen. Dadurch werden die beiden letzten der Gleichungen (12):

$$0 = \frac{\cos\Omega}{a}\left\{ b\sin\Omega - A\,(e_1 - a_1\cos\Omega_1) - Bb_1\sin\Omega_1 \right\}$$
$$+ \frac{\sin\Omega}{b}\left\{ (e - a\cos\Omega) - C\,(e_1 - a_1\cos\Omega_1) - Db_1\sin\Omega_1 \right\},$$
$$0 = \frac{\cos\Omega_1}{a_1}\left\{ D\,(e - a\cos\Omega) + Bb\sin\Omega - b_1\sin\Omega_1 \right\}$$
$$+ \frac{\sin\Omega_1}{b_1}\left\{ C\,(e - a\cos\Omega) + Ab\sin\Omega - (e - a_1\cos\Omega_1)\right\}$$

oder:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{e - Ce_1}{b}\sin\Omega - \frac{e_1}{a}A\cos\Omega - \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\sin\Omega\cos\Omega \\ + \left(\frac{a_1}{a}A\cos\Omega + \frac{a_1}{b}C\sin\Omega\right)\cos\Omega_1 \\ - \left(\frac{b_1}{a}B\cos\Omega + \frac{b_1}{b}D\sin\Omega\right)\sin\Omega_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{e_1 - Ce}{b_1}\sin\Omega_1 - \frac{e}{a_1}D\cos\Omega_1 - \left(\frac{a_1}{b_1} - \frac{b_1}{a_1}\right)\sin\Omega_1\cos\Omega_1 \\ + \left(\frac{a}{a_1}D\cos\Omega_1 + \frac{a}{b_1}C\sin\Omega_1\right)\cos\Omega \\ - \left(\frac{b}{a_1}B\cos\Omega_1 + \frac{b}{b_1}A\sin\Omega_1\right)\sin\Omega; \end{aligned}$$

oder auch:

$$(23)\quad \begin{aligned} 0 = \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{a_1}{a}C\cdot\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)\sin\Omega - \frac{a_1}{a}\varepsilon_1 A\cos\Omega \\ - \left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \sqrt{1-\varepsilon^2}\right)\sin\Omega\cos\Omega \\ + \frac{a_1}{a}\left(A\cos\Omega + \frac{C}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin\Omega\right)\cos\Omega_1 \\ - \frac{a_1}{a}\left(B\cos\Omega + \frac{D}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin\Omega\right)\sqrt{1-\varepsilon_1^2}\,.\sin\Omega_1, \\ 0 = \left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}} - \frac{a}{a_1}C\cdot\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}\right)\sin\Omega_1 - \frac{a}{a_1}\varepsilon D\cos\Omega_1 \\ - \left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}} - \sqrt{1-\varepsilon_1^2}\right)\sin\Omega_1\cos\Omega_1 \\ + \frac{a}{a_1}\left(D\cos\Omega_1 + \frac{C}{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}\sin\Omega_1\right)\cos\Omega \\ - \frac{a}{a_1}\left(B\cos\Omega_1 + \frac{A}{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}}\sin\Omega_1\right)\sqrt{1-\varepsilon^2}\,.\sin\Omega. \end{aligned}$$

Wie man sich bei der näherungsweisen Auflösung dieser Gleichungen zu verhalten haben würde, bedarf kaum noch einer besonderen Erläuterung. Für angenommene Werthe von Ω bestimmt man das entsprechende Ω_1 mittelst der ersten Gleichung, wobei man sich der bekannten Auflösungsmethode der Gleichungen von der Form

$$\alpha + \beta \cos \varphi + \gamma \sin \varphi = 0$$

bedient, und untersucht dann, ob durch die beiden in Rede stehenden Werthe von Ω und Ω_1 die zweite Gleichung erfüllt wird. Ich glaube aber, dass die erste vorher entwickelte Auflösungsmethode sicherer und leichter zum Zweck führt, weil das Intervall der Grenzen -1 und $+1$, zwischen denen unser obiges U nothwendig liegen muss, ein ganz bestimmtes und nicht sehr grosses ist. Übrigens bemerke ich noch, dass die beiden Gleichungen (23) denen sehr ähnlich sind, auf die schon Herr von Littrow a. a. O. unser Problem zurückgeführt hat.

V. Proximitäten zweier kreisförmigen Bahnen, welche die Mittelpunkte gemein haben.

Wenn man die beiden in IV. betrachteten elliptischen Bahnen als kreisförmig annimmt, und demzufolge $a=b=r$, $a_1=b_1=r_1$, $e=o$, $e_1=o$ setzt; so werden die Gleichungen IV, (12):

$$Z^2 + \mathfrak{Z}^2 = r^2,\ Z_1{}^2 + \mathfrak{Z}_1{}^2 = r_1{}^2;$$
$$Z(\mathfrak{Z} + AZ_1 - B\mathfrak{Z}_1) - \mathfrak{Z}(Z - CZ_1 + D\mathfrak{Z}_1) = 0,$$
$$Z_1(DZ - B\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}_1) + \mathfrak{Z}_1(CZ - A\mathfrak{Z} - Z_1) = 0;$$

oder kürzer:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &Z^2 + \mathfrak{Z}^2 = r^2,\ Z_1{}^2 + \mathfrak{Z}_1{}^2 = r_1{}^2;\\ &(AZ_1 - B\mathfrak{Z}_1)\,Z + (CZ_1 - D\mathfrak{Z}_1)\,\mathfrak{Z} = 0.\\ &(DZ - B\mathfrak{Z})\,Z_1 + (CZ - A\mathfrak{Z})\,\mathfrak{Z}_1 = 0.\end{aligned}\right.$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt:

$$(2)\qquad \mathfrak{Z}_1 = \frac{AZ+C\mathfrak{Z}}{BZ+D\mathfrak{Z}}Z_1,\ \mathfrak{Z}_1 = -\frac{DZ-B\mathfrak{Z}}{CZ-A\mathfrak{Z}}Z_1;$$

und durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe von $\mathfrak{Z}_1$ erhält man die Gleichung:

$$(AZ + C\mathfrak{Z})(CZ - A\mathfrak{Z}) + (BZ + D\mathfrak{Z})(DZ - B\mathfrak{Z}) = 0,$$

welche, weiter entwickelt, zu der Gleichung

$$(AC + BD)(Z^2 - \mathfrak{Z}^2) - (A^2 + B^2 - C^2 - D^2)Z\mathfrak{Z} = 0$$

führt, so dass man also jetzt zur Bestimmung von Z und $\mathfrak{Z}$ die beiden Gleichungen

$$(3)\quad \begin{cases} Z^2 + \mathfrak{Z}^2 = r^2, \\ (AC+BD)\,(Z^2-\mathfrak{Z}^2) - (A^2+B^2-C^2-D^2)\,Z\mathfrak{Z} = 0 \end{cases}$$

hat. Weil wegen der ersten Gleichung

$$\mathfrak{Z}^2 = r^2 - Z^2$$

ist, so wird die zweite Gleichung

$$(AC+BD)\,(2Z^2-r^2) - (A^2+B^2-C^2-D^2)\,Z\mathfrak{Z} = 0,$$

woraus sich

$$(4)\qquad \mathfrak{Z} = \frac{(AC+BD)\,(2\,\mathfrak{Z}^2-r^2)}{(A^2+B^2-C^2-D^2)\,Z}$$

ergibt. Führt man aber diesen Werth von $\mathfrak{Z}$ in die erste der beiden Gleichungen (3) ein, so erhält man zur Bestimmung von Z die Gleichung:

$$(5)\qquad Z^2 + \frac{(AC+BD)^2\,(2Z^2-r^2)^2}{(A^2+B^2-C^2-D^2)^2\,Z^2} = r^2.$$

Nach gehöriger Entwickelung erhält man aus dieser Gleichung die Gleichung

$$\left.\begin{array}{r} \{(A^2+B^2-C^2-D^2)^2 + 4(AC+BD)^2\}\;Z^4 \\ -\{(A^2+B^2-C^2-D^2)^2 + 4(AC+BD)^2\}\;r^2Z^2 \\ +\;(AC+BD)^2\;r^4 \end{array}\right\} = 0,$$

und löst man diese Gleichung wie eine quadratische Gleichung auf gewöhnliche Weise auf, so erhält man nach einigen leichten Transformationen:

$$(6)\qquad Z^2 = \frac{1}{2}\,r^2\left\{1 \pm \frac{A^2+B^2-C^2-D^2}{\sqrt{(A^2+B^2-C^2-D^2)^2+2(AC+BD)^2}}\right\}$$

Auch überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der nachstehenden Gleichung:

$$(A^2+B^2-C^2-D^2)^2 + 4(AC+BD)^2$$
$$= (A^2+B^2+C^2+D^2)^2 - 4(AD-BC)^2,$$

und kann daher die Formel (6) auch auf folgende Art darstellen:

$$(6^*)\qquad Z^2 = \frac{1}{2}\,r^2\left\{1 \pm \frac{A^2+B^2-C^2-D^2}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2+D^2)^2-4^4(AD-BC)^2}}\right\}$$

Weil der absolute Werth des Bruches

$$\frac{A^2+B^2-C^2-D^2}{\sqrt{A^2+B^2-C^2-D^2)^2+4\,(AC+BD)^2}}$$

offenbar immer kleiner als die Einheit ist, so erhellet aus (6), dass die beiden Werthe von Z^2 immer positiv sind, also Z jederzeit vier reelle Werthe hat.

Aus Z ergibt sich $\mathfrak{Z}$ mittelst der Formel (4) ohne alle Zweideutigkeit, und zur Bestimmung von Z_1 erhält man aus (1) und (2):

$$\frac{(AZ+C\mathfrak{Z})^2+(BZ+D\mathfrak{Z})^2}{(BZ+D\mathfrak{Z})^2}\,Z_1{}^2 = \frac{(A\mathfrak{Z}-CZ)^2+(B\mathfrak{Z}-DZ)^2}{(A\mathfrak{Z}-CZ)^2}\,Z_1{}^2 = r_1{}^2,$$

also

$$(7)\; Z_1 = \pm\frac{(BZ-D\mathfrak{Z})\,r_1}{\sqrt{(AZ+C\mathfrak{Z})^2+(BZ+D\mathfrak{Z})^2}} = \pm\frac{(A\mathfrak{Z}-CZ)\,r_1}{\sqrt{(A\mathfrak{Z}-CZ)^2+(B\mathfrak{Z}-DZ)^2}}$$

Endlich findet man $\mathfrak{Z}_1$ mittelst einer der beiden Formeln (2).

Man kann sich die Rechnung nach vorstehenden Formeln durch Einführung von Hülfswinkeln auf verschiedene Arten erleichtern, wobei ich jedoch nicht verweilen will, da dergleichen Transformationen einem Jeden geläufig sind. Bemerken will ich indess, dass, wenn man

$$(8) \qquad \frac{Z}{r} = \cos\varphi,\; \frac{\mathfrak{Z}}{r} = \sin\varphi$$

setzte, was wegen der ersten der Gleichungen (3) verstattet ist, die zweite der Gleichungen (3) die Form

$$(AC+BD)(\cos\varphi^2-\sin\varphi^2)-(A^2+B^2-C^2-D^2)\sin\varphi\cos\varphi=0,$$

also die Form

$$2\,(AC+BD)\cos 2\varphi-(A^2+B^2-C^2-D^2)\sin 2\varphi=0$$

erhalten würde, woraus sich zur Bestimmung von φ die Formel

$$(9) \qquad \operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2\,(AC+BD)}{A^2+B^2-C^2-D^2}$$

ergibt. Hat man mittelst dieser Formel φ gefunden, so erhält man Z und $\mathfrak{Z}$ mittelst der aus (8) unmittelbar fliessenden Formeln:

$$(10) \qquad Z = r\cos\varphi,\; \mathfrak{Z} = r\sin\varphi.$$

Die Grössen Z_1 und $\mathfrak{Z}_1$ erhält man wie vorher.

VI. Proximitäten zweier parabolischen Bahnen, welche die Brennpunkte mit einander gemein haben.

Die Proximitäten zweier parabolischen Bahnen mit gemeinschaftlichen Brennpunkten gestatten eine ganz ähnliche Behandlung wie die Proximitäten zweier elliptischen Bahnen in IV; nur müssen wir hier die aus III (3) bekannte Gleichung der Parabel

$$\frac{(z-w)^2}{\cos\varpi^2\sin i^2} = \frac{1}{4}p^2 - \frac{pz}{\sin\varpi\sin i}$$

in Anwendung bringen. Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{2\,(z-w)}{\cos\varpi^2\ \sin i}\ .\ \frac{d\,(z-w)}{du} = -\frac{p}{\sin\varpi}\ .\ \frac{dz}{du}\,;$$

nach IV ist aber

$$\frac{dz}{du} = -\sin\varpi\ \mathrm{tang}\, i\left(\cos\theta - \cos\tau\,\frac{dv}{du}\right)$$

$$= \frac{\sin\varpi}{\cos\omega}\left(\cos\varpi\,\sin i + \cos\tau\,\frac{dw}{du}\right),$$

$$\frac{d\,(z-w)}{du} = \cos\varpi\ \mathrm{tang}\, i\left(\cos\Theta - \cos\mathfrak{T}\,\frac{dv}{du}\right)$$

$$= \frac{\cos\varpi}{\cos w}\left(\sin\varpi\,\sin i - \cos\mathfrak{T}\,\frac{dw}{du}\right);$$

also durch Substitution in die vorher aus der Gleichung der Parabel durch Differentiation abgeleitete Gleichung

$$\frac{2\,(z-w)}{\cos\varpi\,\sin i}\left(\cos\Theta - \cos\mathfrak{T}\,\frac{dv}{du}\right) = p\left(\cos\theta - \cos\tau\,\frac{dv}{du}\right),$$

$$\frac{2\,(z-w)}{\cos\varpi\,\sin i}\left(\sin\varpi\,\sin i - \cos\mathfrak{T}\,\frac{dw}{du}\right) = -p\left(\cos\varpi\,\sin i + \cos\tau\,\frac{dw}{du}\right)$$

woraus man leicht:

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{dv}{du} &= \frac{p\,\cos\theta - \dfrac{2\,(z-w)}{\cos\varpi\,\sin i}\,\cos\Theta}{p\,\cos\tau - \dfrac{2\,(z-w)}{\cos\varpi\,\sin i}\,\cos\mathfrak{T}},\\ \frac{dw}{du} &= -\sin i\,\frac{p\,\cos\varpi + \dfrac{2\,(z-w)}{\cos\varpi\,\sin i}\,\sin\varpi}{p\,\cos\tau - \dfrac{2\,(z-w)}{\cos\varpi\,\sin i}\,\cos\mathfrak{T}};\end{aligned}\right.$$

oder

$$(1^*)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{dv}{du} &= \frac{p\,\cos\varpi\,\sin i\,\cos\theta - 2\,(z-w)\,\cos\Theta}{p\,\cos\varpi\,\sin i\,\cos\tau - 2\,(z-w)\,\cos\mathfrak{T}},\\ \frac{dw}{du} &= -\sin i\,\frac{p\ c\ s\varpi\,\cos\varpi\,\sin i + 2\,(z-w)\,\sin\varpi}{p\,\cos\varpi\,\cos\tau\,\sin i - 2\,(z-w)\,\cos\mathfrak{T}}\end{aligned}\right.$$

erhält.

Ganz wie in IV haben wir:

$$u = \left(z\,\frac{\cos\mathfrak{T}}{\sin\varpi} + \mathfrak{z}\,\frac{\cos\tau}{\cos\varpi}\right)\mathrm{cosec}\, i\,,$$

$$v = \left(z\,\frac{\cos\Theta}{\sin\varpi} + \mathfrak{z}\,\frac{\cos\theta}{\cos\varpi}\right)\mathrm{cosec}\, i\,,$$

$$w = z - \mathfrak{z}\,;$$

und natürlich eben so:

$$u_1 = \left(z_1 \frac{\cos \mathfrak{T}_1}{\sin \varpi_1} + \mathfrak{z}_1 \frac{\cos \tau_1}{\cos \varpi_1}\right) \operatorname{cosec} i_1,$$
$$v_1 = \left(z_1 \frac{\cos \Theta_1}{\sin \varpi_1} + \mathfrak{z}_1 \frac{\cos \theta_1}{\cos \varpi_1}\right) \operatorname{cosec} i_1,$$
$$w_1 = z_1 - \mathfrak{z}_1;$$

so dass also, wenn wir jetzt

$$(2) \qquad Z = \frac{z}{\sin \varpi \ \sin i}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{z - w}{\cos \varpi \ \sin i}$$

und

$$(2^*) \qquad Z_1 = \frac{z_1}{\sin \varpi_1 \sin i_1}, \quad \mathfrak{Z}_1 = \frac{z_1 - w_1}{\cos \varpi_1 \sin i_1}$$

setzen:

$$(3) \quad \begin{cases} u = Z \cos \mathfrak{T} + \mathfrak{Z} \cos \tau, \\ v = Z \cos \Theta + \mathfrak{Z} \cos \theta, \\ w = (Z \sin \varpi - \mathfrak{Z} \cos \varpi) \sin i \end{cases}$$

und

$$(3^*) \quad \begin{cases} u_1 = Z_1 \cos \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{Z}_1 \cos \tau_1, \\ v_1 = Z_1 \cos \Theta_1 + \mathfrak{Z}_1 \cos \theta_1, \\ w_1 = (Z_1 \sin \varpi_1 - \mathfrak{Z}_1 \cos \varpi_1) \sin i_1 \end{cases}$$

ist.

Wegen der Gleichung der Parabel hat man nun zuvörderst die beiden folgenden Gleichungen:

$$(4) \qquad \mathfrak{Z}^2 = p\left(\frac{1}{4} p - Z\right), \quad \mathfrak{Z}_1^2 = p_1\left(\frac{1}{4} p_1 - Z_1\right).$$

Ferner muss nach I. (16),

$$u - u_1 + (v - v_1)\frac{dv}{du} + (w - w_1)\frac{dw}{du} = 0,$$
$$u - u_1 + (v - v_1)\frac{dv_1}{du_1} + (w - w_1)\frac{dw_1}{du_1} = 0$$

sein, woraus sich nach (1 *) die Gleichungen

$$0 = p \cos \varpi \sin i \,\{(u - u_1) \cos \tau + (v - v_1) \cos \theta - (w - w_1) \cos \varpi \ \sin i\}$$
$$- 2(z \quad w) \ \{(u - u_1) \cos \mathfrak{T} + (v - v_1) \cos \Theta - (w + w_1) \sin \varpi \ \sin i\},$$
$$0 = p_1 \cos \varpi_1 \sin i_1 \{(u - u_1) \cos \tau_1 + (v - v_1) \cos \theta_1 - (w - w_1) \cos \varpi_1 \sin i_1\}$$
$$- 2(z_1 - w_1) \{(u - u_1) \cos \mathfrak{T}_1 + (v - v_1) \cos \Theta_1 + (w - w_1) \sin \varpi_1 \sin i_1\};$$

oder nach (2 *) die Gleichungen

$$0 = \frac{1}{2} p \left\{ (u - u_1) \cos \tau + (v - v_1) \cos \theta - (w - w_1) \cos \varpi \ \sin i \right\}$$
$$- \mathfrak{Z} \left\{ (u - u_1) \cos \mathfrak{T} + (v - v_1) \cos \Theta + (w - w_1) \sin \varpi \ \sin i \right\},$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{2}\, p_1 & \left\{ (u-u_1) \cos \tau_1 + (v-v_1) \cos \theta_1 + (w-w_1) \cos \varpi_1 \sin i_1 \right\} \\ - \mathfrak{Z}_1 & \left\{ (u-u_1) \cos \mathfrak{T}_1 + (v-v_1) \cos \Theta_1 + (w-w_1) \sin \varpi_1 \sin i_1 \right\} \end{aligned}$$

ergeben.

Führt man nun in diese Gleichungen für u, v, w und u_1, v_1, w_1 ihre obigen Werthe ein, so werden dieselben:

$$0 = \frac{1}{2} p \left\{ \begin{array}{l} Z\,(\cos \tau \cos \mathfrak{T} + \cos \theta \cos \Theta - \sin \varpi \cos \varpi \sin i^2) \\ + \mathfrak{Z}\,(\cos \tau \cos \tau + \cos \theta \cos \theta + \cos \varpi \cos \varpi \sin i^2) \\ - Z_1(\cos \tau \cos \mathfrak{T}_1 + \cos \theta \cos \Theta_1 - \cos \varpi \sin \varpi_1 \sin i \sin i_1) \\ - \mathfrak{Z}_1(\cos \tau \cos \tau_1 + \cos \theta \cos \theta_1 + \cos \varpi \cos \varpi_1 \sin i \sin i_1) \end{array} \right\}$$

$$- \mathfrak{Z} \left\{ \begin{array}{l} Z\,(\cos \mathfrak{T} \cos \mathfrak{T} + \cos \Theta \cos \Theta + \sin \varpi \sin \varpi \sin i^2) \\ + \mathfrak{Z}\,(\cos \tau \cos \mathfrak{T} + \cos \theta \cos \Theta - \sin \varpi \cos \varpi \sin i^2) \\ - Z_1(\cos \mathfrak{T} \cos \mathfrak{T}_1 + \cos \Theta \cos \Theta_1 + \sin \varpi \sin \varpi_1 \sin i \sin i_1) \\ - \mathfrak{Z}_1(\cos \mathfrak{T} \cos \tau_1 + \cos \Theta \cos \theta_1 - \sin \varpi \cos \varpi_1 \sin i \sin i_1) \end{array} \right\}$$

$$0 = \frac{1}{2} p_1 \left\{ \begin{array}{l} Z\,(\cos \mathfrak{T} \cos \tau_1 + \cos \Theta \cos \theta_1 - \sin \varpi \cos \varpi_1 \sin i \sin i_1) \\ + \mathfrak{Z}\,(\cos \tau \cos \tau_1 + \cos \theta \cos \theta_1 + \cos \varpi \cos \varpi_1 \sin i \sin i_1) \\ - Z_1(\cos \tau_1 \cos \mathfrak{T}_1 + \cos \theta_1 \cos \Theta_1 - \sin \varpi_1 \cos \varpi_1 \sin i_1^2) \\ - \mathfrak{Z}_1(\cos \tau_1 \cos \tau_1 + \cos \theta_1 \cos \theta_1 + \cos \varpi_1 \cos \varpi_1 \sin i_1^2) \end{array} \right\}$$

$$- \mathfrak{Z}_1 \left\{ \begin{array}{l} Z\,(\cos \mathfrak{T} \cos \mathfrak{T}_1 + \cos \Theta \cos \Theta_1 + \sin \varpi \sin \varpi_1 \sin i \sin i_1) \\ + \mathfrak{Z}\,(\cos \tau \cos \mathfrak{T}_1 + \cos \theta \cos \Theta_1 - \cos \varpi \sin \varpi_1 \sin i \sin i_1) \\ - Z_1(\cos \mathfrak{T}_1 \cos \mathfrak{T}_1 + \cos \Theta_1 \cos \Theta_1 + \sin \varpi_1 \sin \varpi_1 \sin i_1^2) \\ - \mathfrak{Z}_1(\cos \tau_1 \cos \mathfrak{T}_1 + \cos \theta_1 \cos \Theta_1 - \sin \varpi_1 \cos \varpi_1 \sin i_1^2) \end{array} \right\}$$

also ebenso wie in IV:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} p \;\; (\mathfrak{Z} - A Z_1 - B \mathfrak{Z}_1) - \mathfrak{Z} \;\; (Z - C Z_1 - D \mathfrak{Z}_1) = 0, \\ \frac{1}{2} p_1 \, (D Z + B \mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1) - \mathfrak{Z}_1 \, (C Z + A \mathfrak{Z} - Z_1) = 0. \end{array} \right.$$

Folglich haben wir nach (4) und (5) zur Bestimmung von Z, $\mathfrak{Z}$, Z_1, $\mathfrak{Z}_1$, die vier folgenden Gleichungen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{Z}^2 = p \left(\frac{1}{4} p - Z\right), \; \mathfrak{Z}_1^2 = p_1 \left(\frac{1}{4} p_1 - Z_1\right); \\ \frac{1}{2} p \, (\mathfrak{Z} - A Z_1 - B \mathfrak{Z}_1) - \mathfrak{Z} \, (Z - C Z_1 - D \mathfrak{Z}_1) = 0, \\ \frac{1}{2} p_1 \, (D Z + B \mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1) - \mathfrak{Z}_1 \, (C Z + A \mathfrak{Z} - Z_1) = 0. \end{array} \right.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergibt sich:

$$(7) \qquad Z = \frac{\frac{1}{4} p^2 - \mathfrak{Z}^2}{p}, \; Z_1 = \frac{\frac{1}{4} p_1^2 - \mathfrak{Z}_1^2}{p_1};$$

und führt man diese Ausdrücke von Z und Z_1 in die beiden letzteren Gleichungen ein, so erhält man zwischen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_1$ die beiden folgenden Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} &\frac{1}{8} A\, p^2 p_1{}^2 - \frac{1}{4}(p + Cp_1)\, p\, p_1\, \mathfrak{Z} - p_1\, \mathfrak{Z}^3 \\ &+ \left(\frac{1}{2} Bp - D\mathfrak{Z}\right) p\, p_1\, \mathfrak{Z}_1 - \left(\frac{1}{2} Ap - C\mathfrak{Z}\right) p\, \mathfrak{Z}_1{}^2 \end{aligned}\right\} = 0, \\ \left.\begin{aligned} &\frac{1}{8} Dp^2 p_1{}^2 - \frac{1}{4}(p_1 + Cp)\, pp_1\, \mathfrak{Z}_1 - p\mathfrak{Z}_1{}^3 \\ &+ \left(\frac{1}{2} Bp_1 - A\mathfrak{Z}_1\right) pp_1\, \mathfrak{Z} - \left(\frac{1}{2} Dp_1 - C\mathfrak{Z}_1\right) p_1\, \mathfrak{Z}^2 \end{aligned}\right\} = 0; \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{8}A - \dfrac{1}{4}\left(C + \dfrac{p}{p_1}\right)\dfrac{\mathfrak{Z}}{p} - \dfrac{p}{p_1}\left(\dfrac{\mathfrak{Z}}{p}\right)^3 \\ + \left(\dfrac{1}{2} B - D\dfrac{\mathfrak{Z}}{p}\right)\dfrac{\mathfrak{Z}_1}{p_1} - \left(\dfrac{1}{2} A - C\dfrac{\mathfrak{Z}}{p}\right)\left(\dfrac{\mathfrak{Z}_1}{p_1}\right)^2 = 0, \\ \dfrac{1}{8} D - \dfrac{1}{4}\left(C + \dfrac{p_1}{p}\right)\dfrac{\mathfrak{Z}_1}{p_1} - \dfrac{p_1}{p}\left(\dfrac{\mathfrak{Z}_1}{p_1}\right)^3 \\ + \left(\dfrac{1}{2} B - A\dfrac{\mathfrak{Z}_1}{p_1}\right)\dfrac{\mathfrak{Z}}{p} - \left(\dfrac{1}{2} D - C\dfrac{\mathfrak{Z}_1}{p_1}\right)\left(\dfrac{\mathfrak{Z}}{p}\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Die erste dieser beiden Gleichungen ist in Bezug auf $\frac{\mathfrak{Z}_1}{p_1}$ als unbekannte Grösse nur vom zweiten Grade. Man wird also für $\frac{\mathfrak{Z}}{p}$ beliebige Werthe annehmen, $\frac{\mathfrak{Z}_1}{p_1}$ mittelst der ersten der beiden obigen Gleichungen, welche nur vom zweiten Grade ist, bestimmen, und untersuchen, ob durch die auf diese Weise erhaltenen, einander entsprechenden Werthe von $\frac{\mathfrak{Z}}{p}$ und $\frac{\mathfrak{Z}_1}{p_1}$ die zweite der beiden obigen Gleichungen erfüllt wird. Ist es auf diese Weise gelungen, $\frac{\mathfrak{Z}}{p}$ und $\frac{\mathfrak{Z}_1}{p_1}$, also auch $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_1$, zu bestimmen, so ergeben sich ferner Z und Z_1 leicht mittelst der Formeln (7). Wünschenswerth wäre es freilich, Grenzen angeben können, zwischen denen $\frac{\mathfrak{Z}}{p}$ nothwendig liegen muss; theoretisch lassen sich aber für diese Grösse nur die praktisch ganz unbrauchbaren Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ angeben, und ich glaube daher, dass bei der vorliegenden Aufgabe ein Modell der beiden parabolischen Bahnen, wie es schon Herr v. Littrow gebraucht hat, wesentliche Dienste leisten kann, um erste Näherungswerthe von $\frac{\mathfrak{Z}}{p}$ zu finden, die dann mittelst der obigen Gleichungen leicht weiter verbessert und zu völliger Genauigkeit erhoben werden können.

VII. Proximitäten einer elliptischen und einer parabolischen Bahn, die einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben.

Für

$$(1)\qquad Z = e - \frac{\mathfrak{z}}{\sin\varpi \sin i}\,,\ \mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{z}-w}{\cos\varpi \sin i}$$

und

$$(2)\qquad Z_1 = \frac{\mathfrak{z}_1}{\sin\varpi_1 \sin i_1}\,,\ \mathfrak{Z}_1 = \frac{\mathfrak{z}_1 - w_1}{\cos\varpi_1 \sin i_1}$$

haben wir nach IV und VI die beiden folgenden Gleichungen:

$$(3)\qquad \left(\frac{Z}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Z}}{b}\right)^2 = 1,\ \mathfrak{Z}_1^{\,2} = p_1\left(\frac{1}{4}p_1 - Z_1\right).$$

Ferner haben wir für

$$(4)\qquad \begin{cases} u = (e-Z)\cos\mathfrak{T} + \mathfrak{Z}\cos\tau, \\ v = (e-Z)\cos\Theta + \mathfrak{Z}\cos\theta, \\ w = \{(e-Z)\sin\varpi - \mathfrak{Z}\cos\varpi\}\sin i \end{cases}$$

und

$$(5)\qquad \begin{cases} u_1 = Z_1\cos\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{Z}_1\cos\tau_1, \\ v_1 = Z_1\cos\Theta_1 + \mathfrak{Z}_1\cos\theta_1, \\ w_1 = (Z_1\sin\varpi_1 - \mathfrak{Z}_1\cos\varpi_1)\sin i_1 \end{cases}$$

nach IV und VI, die beiden folgenden Gleichungen:

$$0 = \frac{Z}{a^2}\left\{(u-u_1)\cos\tau + (v-v_1)\cos\theta - (w-w_1)\cos\varpi\sin i\right\}$$

$$+ \frac{\mathfrak{Z}}{b^2}\left\{(u-u_1)\cos\mathfrak{T} + (v-v_1)\cos\Theta + (w-w_1)\sin\varpi\sin i\right\},$$

$$0 = \frac{1}{2}p_1\left\{(u-u_1)\cos\tau_1 + (v-v_1)\cos\theta_1 - (w-w_1)\cos\varpi_1\sin i_1\right\}$$

$$-\mathfrak{Z}_1\left\{(u-u_1)\cos\mathfrak{T}_1 + (v-v_1)\cos\Theta_1 + (w-w_1)\sin\varpi_1\sin i_1\right\}:$$

aus denen sich, wenn man die obigen Ausdrücke von u, v, w und u_1, v_1, w_1 einführt, die folgenden Gleichungen ergeben:

$$0 = \frac{Z}{a^2}\left\{\begin{array}{l} (e-Z)(\cos\tau\ \cos\mathfrak{T} + \cos\theta\ \cos\Theta - \sin\varpi\ \cos\varpi\ \sin i^2) \\ +\mathfrak{Z}\ (\cos\tau\ \cos\tau + \cos\theta\ \cos\theta + \cos\varpi\ \cos\varpi\ \sin i^2) \\ -Z_1\,(\cos\tau\ \cos\mathfrak{T}_1 + \cos\theta\ \cos\Theta_1 - \cos\varpi\ \sin\varpi_1\sin i\sin i_1) \\ -\mathfrak{Z}_1\,(\cos\tau\ \cos\tau_1 + \cos\theta\ \cos\theta_1 + \cos\varpi\ \cos\varpi_1\sin i\sin i_1) \end{array}\right\}$$

$$+ \frac{\mathfrak{Z}}{b^2}\left\{\begin{array}{l} (e-Z)(\cos\mathfrak{T}\ \cos\mathfrak{T} + \cos\Theta\ \cos\Theta + \sin\varpi\ \sin\varpi\ \sin i^2) \\ +\mathfrak{Z}\ (\cos\tau\ \cos\mathfrak{T} + \cos\theta\ \cos\Theta - \sin\varpi\ \cos\varpi\ \sin i^2) \\ -Z_1\,(\cos\mathfrak{T}\ \cos\mathfrak{T}_1 + \cos\Theta\ \cos\Theta_1 + \sin\varpi\ \sin\varpi_1\sin i\sin i_1) \\ -\mathfrak{Z}_1\,(\cos\mathfrak{T}\ \cos\tau_1 + \cos\Theta\ \cos\theta_1 - \sin\varpi\ \cos\varpi_1\sin i\sin i_1) \end{array}\right\},$$

$$0 = \frac{1}{2} p_1 \left\{ \begin{array}{l} (e-Z)\,(\cos\mathfrak{T}\ \cos\tau_1 + \cos\Theta\ \cos\theta_1 - \sin\varpi\ \cos\varpi_1 \sin i \sin i_1) \\ \quad +\mathfrak{Z}\ \ (\cos\tau\ \cos\tau_1 + \cos\theta\ \cos\theta_1 + \cos\varpi\ \cos\varpi_1 \sin i \sin i_1) \\ \quad -Z_1\,(\cos\tau_1 \cos\mathfrak{T}_1 + \cos\theta_1 \cos\Theta_1 - \sin\varpi_1 \cos\varpi_1 \sin i_1^2) \\ \quad -\mathfrak{Z}_1\,(\cos\tau_1 \cos\tau_1 + \cos\theta_1 \cos\theta_1 + \cos\varpi_1 \cos\varpi_1 \sin i_1^2) \end{array} \right\}$$

$$- \mathfrak{Z}_1 \left\{ \begin{array}{l} (e-Z)\,(\cos\mathfrak{T}\ \cos\mathfrak{T}_1 + \cos\Theta\ \cos\Theta_1 + \sin\varpi\ \sin\varpi_1 \sin i \sin i_1) \\ \quad +\mathfrak{Z}\ \ (\cos\tau\ \cos\mathfrak{T}_1 + \cos\theta\ \cos\Theta_1\ \ \ \cos\varpi\ \sin\varpi_1 \sin i \sin i_1) \\ \quad -Z_1\,(\cos\mathfrak{T}_1 \cos\mathfrak{T}_1 + \cos\Theta_1 \cos\Theta_1 + \sin\varpi_1 \sin\varpi_1 \sin i_1^2) \\ \quad -\mathfrak{Z}_1\,(\cos\tau_1 \cos\mathfrak{T}_1 + \cos\theta_1 \cos\Theta_1 - \sin\varpi_1 \cos\varpi_1 \sin i_1^2) \end{array} \right\};$$

also nach IV die beiden folgenden Gleichungen:

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{Z}{a^2} \left\{ \mathfrak{Z} - AZ_1 - B\mathfrak{Z}_1 \right\} + \dfrac{\mathfrak{Z}}{b^2} \left\{ (e-Z) - CZ_1 - D\mathfrak{Z}_1 \right\} = 0, \\ \dfrac{1}{2} p_1 \left\{ D\,(e-Z) + B\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1 \right\} - \mathfrak{Z}_1 \left\{ C\,(e-Z) + A\mathfrak{Z} - Z_1 \right\} = 0. \end{cases}$$

Also haben wir jetzt nach (3) und (6) zur Bestimmung von Z, $\mathfrak{Z}$, Z_1, $\mathfrak{Z}_1$ die vier folgenden Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{Z}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathfrak{Z}}{b}\right)^2 = 1, \quad \mathfrak{Z}_1^2 = p_1\left(\dfrac{1}{4} p_1 - Z_1\right); \\ \dfrac{Z}{a^2} \left\{ \mathfrak{Z} - AZ_1 - B\mathfrak{Z}_1 \right\} + \dfrac{\mathfrak{Z}}{b^2} \left\{ (e-Z) - CZ_1 - D\mathfrak{Z}_1 \right\} = 0, \\ \dfrac{1}{2} p_1 \left\{ D\,(e-Z) + B\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1 \right\} - \mathfrak{Z}_1 \left\{ C\,(e-Z) + A\mathfrak{Z} - Z_1 \right\} = 0. \end{cases}$$

Setzt man

$$(8) \qquad U = \frac{Z}{a},\ V = \frac{\mathfrak{Z}}{b};\ U_1 = \frac{\mathfrak{Z}_1}{p_1},\ V_1 = \frac{\mathfrak{Z}_1}{p_1};$$

und wie gewöhnlich

$$(9) \qquad \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2};$$

so werden die Gleichungen (7):

$$U^2 + V^2 = 1,\quad V_1^2 = \frac{1}{4} - U_1;$$

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{U}{a} \left\{ bV - Ap_1\ U_1 - Bp_1\ V_1 \right\} \\ + \dfrac{V}{b} \left\{ a\,(\varepsilon - U) - Cp_1\ U_1 - Dp_1\ V_1 \right\} \end{array} \right\} = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ Da\,(\varepsilon - U) + BbV - p_1\ V_1 \right\} \\ - 2\ V_1 \left\{ Ca\,(\varepsilon - U) + AbV - p_1\ U_1 \right\} \end{array} \right\} = 0;$$

oder, wenn wir

$$(10) \qquad W = \varepsilon - U$$

setzen:

$$U^2 + V^2 = 1,\ V_1^2 = \frac{1}{4} - U_1;$$

$$\frac{\varepsilon - W}{a}(bV - Ap_1 U_1 - Bp_1 V_1) + \frac{V}{b}(aW - Cp_1 U_1 - Dp_1 V_1) = 0,$$

$$(DaW + BbV - p_1 V_1) - 2V_1 (CaW + AbV - p_1 U_1) = 0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$V_1 = \frac{\frac{b}{a} V - \frac{p_1}{a} AU_1)(\varepsilon - W) + \left(\frac{a}{b} W - \frac{p_1}{b} CU_1\right) V}{\frac{p_1}{a} B(\varepsilon - W) + \frac{p_1}{b} DV},$$

$$V = \frac{DW + \frac{b}{a} BV}{\frac{p_1}{a} + 2\left(CW + \frac{b}{a} AV - \frac{p_1}{a_1} U_1\right)};$$

oder, wenn der Kürze wegen:

$$F = \frac{b}{a} V(\varepsilon - W) + \frac{a}{b} VW,$$

$$G = -\frac{p_1}{a} A(\varepsilon - W) - \frac{p_1}{b} CV,$$

$$H = \frac{p_1}{a} B(\varepsilon - W) + \frac{p_1}{b} DV,$$

$$J = DW + \frac{b}{a} BV,$$

$$K = \frac{p_1}{a} + 2\left(CW + \frac{b}{a} AV\right).$$

$$L = -\frac{2p_1}{a_1}$$

oder auch

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} F &= \left\{(\varepsilon - W)\sqrt{1-\varepsilon^2} + \frac{W}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right\} V, \\ G &= -\frac{p_1}{a}\left\{A(\varepsilon - W) + \frac{CV}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right\}, \\ H &= \frac{p_1}{a}\left\{B(\varepsilon - W) + \frac{DV}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right\}, \\ J &= DW + BV\sqrt{1-\varepsilon}, \\ K &= \frac{p_1}{a} + 2\left(CW + AV\sqrt{1-\varepsilon^2}\right), \\ L &= -\frac{2p_1}{a_1} \end{aligned} \right.$$

gesetzt wird:

(12) $$V_1 = \frac{F + G\,U_1}{H}, \quad V_1 = \frac{J}{K + L\,U_1}.$$

Setzt man diese beiden Werthe von V_1 einander gleich, so erhält man nach gehöriger Entwickelung die Gleichung:

(13) $$G\,L\,U_1^2 + (F\,L + G\,K)\,U_1 + F\,K - H\,J = 0,$$

und auf ähnliche Art wie in IV bedient man sich nun dieser Gleichungen und Formeln in folgender Weise.

Wegen der Gleichung

$$U^2 + V^2 = 1$$

liegt U zwischen den Grenzen -1 und $+1$. Man muss also das Intervall zwischen -1 und $+1$ in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilen, und die dadurch erhaltenen Werthe nach und nach für U setzen, worauf man die entsprechenden Werthe von W mittelst der Formel

$$W = \varepsilon - U,$$

und die entsprechenden Werthe von V mittelst der Formel

$$V = \pm\sqrt{1 - U^2} = \pm\sqrt{(1-U)\,(1+U)}$$

findet. Dann kann man die entsprechenden Werthe von F, G, H, J, K, L mittelst der Formeln (11) berechnen, und die entsprechenden Werthe von U_1 erhält man hierauf durch Auflösung der quadratischen Gleichung (13). Die entsprechenden Werthe von V_1 werden endlich mittelst einer der Formeln (12) gefunden, und hierauf durch Einführung der Werthe von U_1 und V_1 in die Gleichung

$$V_1^2 = \frac{1}{4} - U_1$$

untersucht, in wie weit diese Gleichung erfüllt ist. Eigentlich berechnet man die Werthe der Function

$$U_1 + V_1^2 - \frac{1}{4},$$

die zum Verschwinden gebracht werden muss, und beurtheilt aus den Zeichenwechseln dieser Werthe in bekannter Weise die engeren Grenzen, zwischen denen U liegen muss. Eine weitere Erläuterung bedarf dieses allgemein bekannte Verfahren der successiven Annäherung hier nicht.

VIII. Besondere Betrachtung des Falls, wenn die eine der beiden einen gemeinschaftlichen Brennpunkt habenden Bahnen eine ganz in der Ebene der xy liegende Ellipse ist.

Zuerst wollen wir annehmen, dass beide Bahnen Ellipsen seien, Dann ist nach II. (33) die Gleichung der ganz in der Ebene der xy liegenden Bahn:

$$(1) \qquad \left(\frac{u\cos\varpi + v\sin\varpi - e}{a}\right)^2 + \left(\frac{u\sin\varpi - v\cos\varpi}{b}\right)^2 = 1,$$

und für die andere Bahn behalten im Folgenden alle accentuirten Buchstaben die ihnen in IV. beigelegte Bedeutung.

Durch Differentiation erhält man aus (1) leicht

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\dfrac{(u\cos\varpi + v\sin\varpi - e)\cos\varpi}{a^2} + \dfrac{(u\sin\varpi - v\cos\varpi)\sin\varpi}{b^2}}{\dfrac{(u\cos\varpi + v\sin\varpi - e)\sin\varpi}{a^2} + \dfrac{(u\sin\varpi - v\cos\varpi)\cos\varpi}{b^2}}$$

also, wenn man

$$(2) \qquad \begin{cases} Z = e - u\cos\varpi - v\sin\varpi, \\ \mathfrak{Z} = \phantom{e - {}} u\sin\varpi - v\cos\varpi \end{cases}$$

setzt;

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\dfrac{Z\cos\varpi}{a^2} - \dfrac{\mathfrak{Z}\sin\varpi}{b^2}}{\dfrac{Z\sin\varpi}{a^2} - \dfrac{\mathfrak{Z}\cos\varpi}{b^2}}.$$

Aus den Gleichungen (2) erhält man aber:

$$(3) \qquad \begin{cases} u = (e - Z)\cos\varpi + \mathfrak{Z}\sin\varpi, \\ u = (e - Z)\sin\varpi - \mathfrak{Z}\cos\varpi, \\ w = 0; \end{cases}$$

und man hat nun jetzt zuvörderst die beiden folgenden Gleichungen:

$$(4) \qquad \left(\frac{Z}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Z}}{b}\right)^2 = 1,\ \left(\frac{Z_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Z}_1}{b_1}\right)^2 = 1.$$

Nun muss bekanntlich

$$u - u_1 + (v - v_1)\frac{dv}{du} + (w - w)\frac{dw}{du} = 0$$

sein, woraus man nach dem Vorhergehenden, mit Rücksicht darauf, dass

$$w = 0,\ \frac{dw}{du} = 0$$

ist, die Gleichung

$$\frac{Z}{a^2}\left\{(u-u_1)\sin\varpi-(v-v_1)\cos\varpi\right\}+$$
$$\frac{\mathfrak{z}}{b^2}\left\{(u-u_1)\cos\varpi+(v-v_1)\sin\varpi\right\}=0.$$

erhält. Ausserdem hat man wie in IV die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{Z_1}{a_1^2}\left\{(u-u_1)\cos\tau_1+(v-v_1)\cos\theta_1\right.\\ \qquad\left.-(w-w_1)\cos\varpi_1\sin i_1\right\}\\ +\dfrac{\mathfrak{z}_1}{b_1^2}\left\{(u-u_1)\cos\mathfrak{T}_1+(v-v_1)\cos\Theta_1\right.\\ \qquad\left.+(w-w_1)\sin\varpi_1\sin i_1\right\}\end{array}\right\}=0.$$

Führt man in diese beiden Gleichungen für u, v, w und u_1, v_1 w_1 ihre Werthe aus dem Vorhergenden und aus IV. ein, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$0=\frac{Z}{a^2}\left\{\begin{array}{l}(e-Z)(\sin\varpi\cos\varpi-\sin\varpi\cos\varpi)\\ \quad+\mathfrak{z}\;(\sin\varpi\sin\varpi+\cos\varpi\cos\varpi)\\ -(e_1-Z_1)(\sin\varpi\cos\mathfrak{T}_1-\cos\varpi\cos\Theta_1)\\ \quad-\mathfrak{z}_1\;(\sin\varpi\cos\tau_1-\cos\varpi\cos\theta_1)\end{array}\right\}$$
$$+\frac{\mathfrak{z}}{b^2}\left\{\begin{array}{l}(e-Z)(\cos\varpi\cos\varpi+\sin\varpi\sin\varpi)\\ \quad+\mathfrak{z}\;(\sin\varpi\cos\varpi-\sin\varpi\cos\varpi)\\ -(e_1-Z_1)(\cos\varpi\cos\mathfrak{T}_1+\sin\varpi\cos\Theta_1)\\ \quad-\mathfrak{z}_1\;(\cos\varpi\cos\tau_1+\sin\varpi\cos\theta_1)\end{array}\right\}$$

$$0=\frac{Z_1}{a_1^2}\left\{\begin{array}{l}(e-Z)(\cos\varpi\cos\tau_1+\sin\varpi\cos\theta_1)\\ \quad+\mathfrak{z}\;(\sin\varpi\cos\tau_1+\cos\varpi\cos\theta_1)\\ \quad-\mathfrak{z}_1\;(\cos\tau_1\cos\tau_1+\cos\theta_1\cos\theta_1\\ \qquad\qquad+\cos\varpi_1\cos\varpi_1\sin i_1^2)\\ -(e_1-Z_1)(\cos\tau_1\cos\mathfrak{T}_1+\cos\theta_1\cos\Theta_1\\ \qquad\qquad-\sin\varpi_1\cos\varpi_1\sin i_1^2)\end{array}\right\}$$
$$+\frac{\mathfrak{z}_1}{b_1^2}\left\{\begin{array}{l}(e-Z)(\cos\varpi\cos\mathfrak{T}_1+\sin\varpi\cos\Theta_1)\\ \quad+\mathfrak{z}\;(\sin\varpi\cos\mathfrak{T}_1+\cos\varpi\cos\Theta_1)\\ -(e_1-Z_1)(\cos\mathfrak{T}_1\cos\mathfrak{T}_1+\cos\Theta_1\cos\Theta_1\\ \qquad\qquad+\sin\varpi_1\sin\varpi_1\sin i_1^2)\\ \quad-\mathfrak{z}_1\;(\cos\tau_1\cos\mathfrak{T}_1+\cos\theta_1\cos\Theta_1\\ \qquad\qquad-\sin\varpi_1\cos\varpi_1\sin i_1^2)\end{array}\right\}.$$

Setzt man nun

$$(5)\quad\left\{\begin{array}{rl}A= & \sin\varpi\cos\mathfrak{T}_1-\cos\varpi\cos\Theta_1\\ = & \cos\omega_1\,(\sin\varpi\cos\varpi_1-\cos\varpi\sin\varpi_1\cos i_1)\\ & -\sin\omega_1\,(\cos\varpi\cos\varpi_1+\sin\varpi\sin\varpi_1\cos i_1),\\ B= & \sin\varpi\cos\tau_1-\cos\varpi\cos\theta_1\\ = & \cos\varpi_1\,(\sin\varpi\sin\varpi_1+\cos\varpi\cos\varpi_1\cos i_1)\\ & -\sin\varpi_1\,(\cos\varpi\sin\varpi_1-\sin\varpi\cos\varpi_1\cos i_1),\end{array}\right.$$

$$
(5)\quad \left\{\begin{aligned}
C &= \cos\varpi\,\cos\Xi_1 + \sin\varpi\,\cos\Theta_1\\
&= \cos\omega_1\,(\cos\varpi\,\cos\varpi_1 + \sin\varpi\,\sin\varpi_1\,\cos i_1)\\
&\quad + \sin\omega_1\,(\sin\varpi\,\cos\varpi_1 - \cos\varpi\,\sin\varpi_1\,\cos i_1),\\
D &= \cos\varpi\,\cos\tau_1 - \sin\varpi\,\cos\theta_1\\
&= \cos\omega_1\,(\cos\varpi\,\sin\varpi_1 - \sin\varpi\,\cos\varpi_1\,\cos i_1)\\
&\quad + \sin\omega_1\,(\sin\varpi\,\sin\varpi_1 + \cos\varpi\,\cos\varpi_1\,\cos i_1);
\end{aligned}\right.
$$

so werden die beiden obigen Gleichungen:

$$
(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{Z}{a^2}\left\{\mathfrak{Z} - A(e_1 - Z_1) - B\mathfrak{Z}_1\right\} +\\
&\frac{\mathfrak{Z}}{b^2}\left\{(e - Z) - C(e_1 - Z_1) - D\mathfrak{Z}_1\right\} = 0,\\
&\frac{Z_1}{a_1^2}\left\{D(e - Z) + B\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1\right\} +\\
&\frac{\mathfrak{Z}_1}{b_1^2}\left\{C(e - Z) + A\mathfrak{Z} - (e_1 - Z_1)\right\} = 0;
\end{aligned}\right.
$$

und man hat daher zur Bestimmung von Z, $\mathfrak{Z}$, Z_1, $\mathfrak{Z}_1$ jetzt die folgenden Gleichungen:

$$
(7)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{Z}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Z}}{b}\right)^2 = 1,\ \left(\frac{Z_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Z}_1}{b_1}\right)^2 = 1;\\
&\frac{Z}{a^2}\left\{\mathfrak{Z} - A(e_1 - Z_1) - B\mathfrak{Z}_1\right\}\\
+\ &\frac{\mathfrak{Z}}{b^2}\left\{(e - Z) - C(e_1 - Z_1) - D\mathfrak{Z}_1\right\} = 0,\\
&\frac{Z_1}{a_1^2}\left\{D(e - Z) + B\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1\right\}\\
+\ &\frac{\mathfrak{Z}_1}{b_1^2}\left\{C(e - Z) + A\mathfrak{Z} - (e_1 - Z_1)\right\} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Bei der Auflösung dieser Gleichungen durch successive Annäherung hat man sich ganz eben so zu verhalten wie in IV. bei der Auflösung der entsprechenden Gleichungen.

Ferner wollen wir annehmen, dass die zweite der beiden Bahnen eine Parabel sei, auf welche sich im Folgenden die accentuirten Buchstaben beziehen, welche hier ganz dieselbe Bedeutung wie in VII haben.

Dann haben wir zuvörderst die beiden Gleichungen:

$$
(8)\qquad \left(\frac{Z}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Z}}{b}\right)^2 = 1,\ \mathfrak{Z}_1^{\,2} = p_1\left(\frac{1}{4}\,p_1 - Z_1\right).
$$

Ferner haben wir ganz wie oben die Gleichung

$$\frac{Z}{a^2}\left\{(u-u_1)\sin\varpi-(v-v_1)\cos\varpi\right\}$$
$$+\frac{\mathfrak{Z}}{b^2}\left\{(u-u_1)\cos\varpi+(v-v_1)\sin\varpi\right\}=0,$$

und eben so wie in VII. haben wir die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}p_1\left\{(u-u_1)\cos\tau_1+(v-v_1)\cos\theta_1-\right.\\ \qquad\left.(w-w_1)\cos\varpi_1\sin i_1\right\}\\ -\mathfrak{Z}_1\left\{(u-u_1)\cos\mathfrak{T}_1+(v-v_1)\cos\Theta_1+\right.\\ \qquad\left.(w-w_1)\sin\varpi_1\sin i_1\right\}\end{array}\right\}=0.$$

Führt man nun in diese beiden Gleichungen für u, v, w und u_1, v_1, w_1 ihre Werthe aus dem Vorhergehenden und aus VII ein, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$0=\frac{Z}{a^2}\left\{\begin{array}{ll}(e-Z) & (\sin\varpi\cos\varpi-\sin\varpi\cos\varpi)\\ +\mathfrak{Z} & (\sin\varpi\sin\varpi+\cos\varpi\cos\varpi)\\ -Z_1 & (\sin\varpi\cos\mathfrak{T}_1-\cos\varpi\cos\Theta_1)\\ -\mathfrak{Z}_1 & (\sin\varpi\cos\tau_1-\cos\varpi\cos\theta_1)\end{array}\right\}$$
$$+\frac{\mathfrak{Z}}{b^2}\left\{\begin{array}{ll}(e-Z) & (\cos\varpi\cos\varpi+\sin\varpi\sin\varpi)\\ +\mathfrak{Z} & (\sin\varpi\cos\varpi-\sin\varpi\cos\varpi)\\ -Z_1 & (\cos\varpi\cos\mathfrak{T}_1+\sin\varpi\cos\Theta_1)\\ -\mathfrak{Z}_1 & (\cos\varpi\cos\tau_1+\sin\varpi\cos\theta_1)\end{array}\right\},$$

$$0=\frac{1}{2}p_1\left\{\begin{array}{ll}(e-Z) & (\cos\varpi\cos\tau_1+\sin\varpi\cos\theta_1)\\ +\mathfrak{Z} & (\sin\varpi\cos\tau_1-\cos\varpi\cos\theta_1)\\ -Z_1 & (\cos\tau_1\cos\mathfrak{T}_1+\cos\theta_1\cos\Theta_1\\ & \qquad -\sin\varpi_1\cos\varpi_1\sin i_1^2)\\ -\mathfrak{Z}_1 & (\cos\tau_1\cos\tau_1+\cos\theta_1\cos\theta_1\\ & \qquad +\cos\varpi_1\cos\varpi_1\sin i_1^2)\end{array}\right\}$$
$$-\mathfrak{Z}_1\left\{\begin{array}{ll}(e-Z) & (\cos\varpi\cos\mathfrak{T}_1+\sin\varpi\cos\Theta_1)\\ +\mathfrak{Z} & (\sin\varpi\cos\mathfrak{T}_1-\cos\varpi\cos\Theta_1)\\ -Z_1 & (\cos\mathfrak{T}_1\cos\mathfrak{T}_1+\cos\Theta_1\cos\Theta_1\\ & \qquad +\sin\varpi_1\sin\varpi_1\sin i_1^2)\\ -\mathfrak{Z}_1 & (\cos\tau_1\cos\mathfrak{T}_1+\cos\theta_1\cos\Theta_1\\ & \qquad -\sin\varpi_1\cos\varpi_1\sin i_1^2)\end{array}\right\}.$$

also nach dem Obigen:

$$(9)\quad\left\{\begin{array}{l}\frac{Z}{a^2}\left\{\mathfrak{Z}-AZ_1-B\mathfrak{Z}_1\right\}+\\ +\frac{\mathfrak{Z}}{b^2}\left\{(e-Z)-CZ_1-D\mathfrak{Z}_1\right\}=0,\\ \frac{1}{2}p_1\left\{D(e-Z)+B\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}_1\right\}\\ -\mathfrak{Z}_1\left\{C(e-Z)+A\mathfrak{Z}-Z_1\right\}=0.\end{array}\right.$$

Also haben wir nach (8) und (9) zur Bestimmung von Z, $\mathfrak{Z}$, Z_1, $\mathfrak{Z}_1$, die Gleichungen:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{Z}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Z}}{b}\right)^2 = 1, \mathfrak{Z}_1^2 = p_1\left(\frac{1}{4}p_1 - Z_1\right);\\ &\frac{Z}{a^2}\left\{\mathfrak{Z} - AZ_1 - B\mathfrak{Z}_1\right\}\\ &+\frac{\mathfrak{Z}}{b^2}\left\{(e-Z) - CZ_1 - D\mathfrak{Z}_1\right\} = 0,\\ &\frac{1}{2}p_1\left\{D(e-Z) + B\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1\right\}\\ &-\mathfrak{Z}_1\left\{C(e-Z) + A\mathfrak{Z} - Z_1\right\} = 0;\end{aligned}\right.$$

bei deren Auflösung man sich ganz eben so zu verhalten hat wie bei der Auflösung der entsprechenden Gleichungen in VII.

Anmerkungen.

Die wenigen Bemerkungen zu dem Vorhergehenden, welche nun noch folgen werden, haben, weil wir uns im Obigen absichtlich nicht ganz an die Elemente gehalten haben, durch welche man in der Astronomie die Lage und Grösse der Bahnen der Planeten und Kometen zu charakterisiren oder zu bestimmen pflegt, den Zweck, die Bedeutung einiger in den obigen Entwickelungen gebrauchten Symbole im Sinne dieser letzteren Bestimmung anzugeben und nachzuweisen.

Wir wollen zuerst die Bahnen der Planeten etwas näher ins Auge fassen. Als Ebene der xy in II nehmen wir die Ekliptik an, und legen den Anfang der xyz in den Mittelpunkt der Sonne. Der positive Theil der Axe der x sei nach dem Anfangspunkte des Widders gerichtet, der positive Theil der Axe der y gehe durch den neunzigsten Grad der Längen, und der positive Theil der Axe der z nach dem Nordpole der Ekliptik. In dem mit dem Systeme der xyz gleichen Anfang habenden Systeme der $x_1\, y_1\, z_1$ sei der positive Theil der Axe der x_1 nach dem aufsteigenden Knoten der Planetenbahn hin gerichtet, und die positiven Theile der Axen der y_1 und z_1 werden dann ferner auf die aus II bekannte Weise genommen. Unter diesen Voraussetzungen ist der in II durch ω bezeichnete Winkel die Länge des aufsteigenden Knotens, welche Herr von Littrow a. a. O. mit k bezeichnet. Der in II mit i bezeichnete Winkel ist die Neigung der Bahn, die Herr v. Littrow a. a. O. mit n bezeichnet. Den in II mit ϖ bezeichneten, 180° nicht übersteigenden Winkel, und die dort mit e bezeichnete Grösse findet man auf folgende Art. Man bezeichne die Distanz des Perihels vom aufsteigenden Knoten in der Ekliptik, welche Herr von Littrow a. a. O. ω nennt, durch Ω, und das, was man in der Astronomie die Excentricität der Planetenbahn nennt, von Herrn von Littrow a. a. O. durch ε bezeichnet, durch (ε). Wenn ersteres Ω kleiner als 180° ist, so liegt das Perihel auf der positiven Seite der Ebene der Ekliptik, der Mittelpunkt der Bahn also auf der negativen Seite derselben, und die in II durch e bezeichnete Grösse ist folglich negativ; bezeichnen wir nun wie gewöhnlich die halbe grosse und kleine Axe der Bahn durch a und b, so ist bekanntlich

$$(\varepsilon)^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad (\varepsilon) = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2},$$

und da nun $e^2 = a^2 - b^2$ ist, so ist im vorliegenden Falle

$$e = -\sqrt{a^2 - b^2}, \text{ also } e = -a\,(\varepsilon)$$

zu setzen, oder in IV (17) würde man das dortige $\varepsilon = -(\varepsilon)$ zu setzen haben. Bezeichnen wir die Distanz des Perihels von der Sonne durch Δ, so ist offenbar $\Delta = a - (-e) = a + e = a - a\,(\varepsilon) = a\,\{1 - (\varepsilon)\}$; und wenn nun $x_1\ y_1\ z_1$ die Coordinaten des Perihels im Systeme der $x_1\ y_1\ z_1$ bezeichnen, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$x_1 = \Delta \cos \varpi, \; y_1 = \Delta \sin \varpi \cos i, \; z_1 = \Delta \sin \varpi \sin i;$$

es ist aber auch, wenn wir den 90° nicht übersteigenden Neigungswinkel der von der Sonne nach dem Perihel gezogenen Linie gegen die Ebene der Ekliptik durch J bezeichnen, offenbar:

$$x_1 = \Delta \cos J \cos \Omega, \; y_1 = \Delta \cos J \sin \Omega, \; z_1 = \Delta \sin J;$$

also, wenn man dieses mit dem Vorhergehenden vergleicht:

$$\begin{aligned} \cos \varpi &= \cos J \cos \Omega, \\ \sin \varpi \cos i &= \cos J \sin \Omega, \\ \sin \varpi \sin i &= \sin J; \end{aligned}$$

woraus sich

$$\tang \varpi = \frac{\tang \Omega}{\cos i}, \quad \sin J = \sin \varpi \sin i$$

ergibt, mittelst welcher Formeln das zwischen 0 und 180° liegende ϖ, und das zwischen 0 und 90° liegende J ohne alle Zweideutigkeit gefunden werden können. Wenn zweitens Ω grösser als 180° ist, so liegt das Perihel auf der negativen Seite der Ebene der Ekliptik, der Mittelpunkt der Bahn also auf der positiven Seite derselben, und die in II durch e bezeichnete Grösse ist folglich positiv; daher ist

$$e = +\sqrt{a^2 - b^2}, \text{ also } e = + a\,(\varepsilon),$$

und in IV (17) würde $\varepsilon = + (\varepsilon)$ zu setzen sein. Jetzt ist die Distanz des Perihels von der Sonne $\Delta = a - (+ e) = a - e = a - a\,(\varepsilon) = a\,\{1 - (\varepsilon)\}$, wie vorher; und wenn x_1, y_1, z_1 dieselbe Bedeutung behalten wie oben, so ist offenbar in diesem Falle, da bekanntlich das 180° nicht übersteigende ϖ den von dem auf der positiven Seite der Ebene der Ekliptik liegenden Theile der Haupt-Axe mit der von der Sonne nach dem aufsteigenden Knoten gezogenen Linie eingeschlossenen Winkel bezeichnet:

$$x_1 = -\Delta \cos \varpi,\ y_1 = -\Delta \sin \varpi \cos i,\ z_1 = -\Delta \sin \varpi \sin i$$

und ganz wie vorher:

$$x_1 = \Delta \cos J \cos \Omega,\quad y_1 = \Delta \cos J \sin \Omega,\quad z_1 = -\Delta \sin J;$$

also

$$\begin{aligned} \cos \varpi &= -\cos J \cos \Omega, \\ \sin \varpi \cos i &= -\cos J \sin \Omega, \\ \sin \varpi \sin i &= \sin J; \end{aligned}$$

woraus sich

$$\operatorname{tang} \varpi = \frac{\operatorname{tang} \Omega}{\cos i},\quad \sin J = \sin \varpi \sin i$$

ergibt, mittelst welcher Formeln das zwischen 0 und 180° liegende ϖ, und das zwischen 0 und 90° liegende J wieder ohne alle Zweideutigkeit gefunden werden können. Das zwischen 0 und 180° liegende ϖ, welches wir hier nur allein gebrauchen, wird also in beiden Fällen, folglich allgemein, mittelst der Formel

$$\operatorname{tang} \varpi = \frac{\operatorname{tang} \Omega}{\cos i}$$

leicht gefunden.

Wir wollen das Vorhergende durch ein paar Beispiele erläutern.

Für die Egeria ist nach Herrn von Littrow in unseren vorhergehenden Zeichen:

$$\begin{aligned} a &= 2{\cdot}577 \\ (\varepsilon) &= 0{\cdot}085 \\ \Omega &= 76^\circ.18', \\ \omega &= 43^\circ.19', \\ i &= 16^\circ.33'. \end{aligned}$$

Also ist nach dem Vorhergehenden in diesem Falle zu setzen:

$$a = a;$$
$$e = -a\,(\varepsilon),\ \varepsilon = -(\varepsilon);$$
$$\omega = \omega;$$
$$i = i;$$
$$tang\ \varpi = \frac{tang\ \Omega}{cos\ i},\ \ 0 < \varpi < 180^0.$$

Für die Asträa ist:

$$a = 2{\cdot}577$$
$$(\varepsilon) = 0{\cdot}189$$
$$\Omega = 354^0.15',$$
$$\omega = 141^0.28',$$
$$i = 5^0.19'.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden in diesem Falle zu setzen:

$$a = a;$$
$$e = +a\,(\varepsilon),\ \varepsilon = +(\varepsilon);$$
$$\omega = \omega;$$
$$i = i;$$
$$tang\ \varpi = \frac{tang\ \Omega}{cos\ i}.\ 0 < \varpi < 180^0.$$

Um nun auch ferner die Bahnen der Kometen einer näheren Betrachtung zu unterwerfen, bemerken wir zuvörderst, dass wir, eben so wie Herr von Littrow a. a. O. der Kürze wegen hier blos elliptische Kometen betrachten werden, wenn auch übrigens natürlich die Betrachtung parabolischer Kometen gleichfalls nicht der geringsten Schwierigkeit unterworfen sein würde. Für rechtläufige Kometen gilt nun natürlich ganz dasselbe, was vorher in Bezug auf die Planeten gesagt worden ist; und es bleibt daher blos noch die Betrachtung der rückläufigen Kometen übrig. Auch hier ist natürlich ω die Länge des aufsteigenden Knotens; der in II mit i bezeichnete Winkel ist aber jetzt die Ergänzung der Neigung der Bahn zu 180^0. Die Distanz des Perihels vom aufsteigenden Knoten in der Ekliptik bezeichnen wir auch jetzt durch Ω, die Excentricität der Bahn durch (ε). Wenn erstens Ω kleiner als 180^0 ist, so liegt das Perihel auf der negativen Seite der Ebene der Ekliptik, der Mittelpunkt der Bahn also auf der positiven Seite derselben, und die in II. durch e bezeichnete Grösse ist folglich positiv; da nun bekanntlich

$$(\varepsilon)^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},\ (\varepsilon) = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$$

und $e^2 = a^2 - b^2$ ist, so ist im vorliegenden Falle

$$e = +\sqrt{a^2 - b^2}, \text{ also } e = +a\,(\varepsilon)$$

zu setzen, oder in IV (17) würde man das dortige $\varepsilon = +(\varepsilon)$ zu setzen haben. Bezeichnen wir die Distanz des Perihels von der Sonne wieder durch Δ, so ist offenbar $\Delta = a - (+e) = a - e = a - a\,(\varepsilon) = a\,\{1 - (\varepsilon)\}$; und wenn nun x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Perihels im Systeme der x_1, y_1, z_1 bezeichnen, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$x_1 = -\Delta \cos\varpi,\ y_1 = -\Delta \sin\varpi \cos i,\ z_1 = -\Delta \sin\varpi \sin i$$

und

$$x_1 = \Delta \cos J \cos\Omega,\ y_1 = \Delta \cos J \sin\Omega,\ z_1 = -\Delta \sin J;$$

also

$$\begin{aligned} \cos\varpi &= -\cos J \cos\Omega, \\ \sin\varpi \cos i &= -\cos J \sin\Omega, \\ \sin\varpi \sin i &= \sin J; \end{aligned}$$

woraus sich

$$\tang \varpi = \frac{\tang \Omega}{\cos i},\ \sin J = \sin\varpi \sin i$$

ergibt. Wenn zweitens Ω grösser als 180^0 ist, so liegt das Perihel auf der positiven Seite der Ebene der Ekliptik, der Mittelpunkt der Bahn also auf der negativen Seite derselben, und die in II durch e bezeichnete Grösse ist folglich negativ; Da nun bekanntlich

$$(\varepsilon)^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},\ (\varepsilon) = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$$

und $e^2 = a^2 - b^2$ ist, so ist im vorliegenden Falle

$$e = -\sqrt{a^2 - b^2}, \text{ also } e = -a\,(\varepsilon)$$

zu setzen, oder in IV (17) würde man das dortige $\varepsilon = -(\varepsilon)$ zu setzen haben. Die Distanz des Perihels von der Sonne ist $\Delta = a - (-e) = a + e = a - a\,(\varepsilon) = a\,\{1 - (\varepsilon)\}$; und wenn x_1, y_1, z_1 wie früher die Coordinaten des Perihels im Systeme der x_1, y_1, z_1 bezeichnen, so ist in völliger Allgemeinheit:

$$x_1 = \Delta \cos\varpi,\ y_1 = \Delta \sin\varpi \cos i,\ z_1 = \Delta \sin\varpi \sin i$$

und

$$x_1 = \Delta \cos J \cos\Omega,\ y_1 = \Delta \cos J \sin\Omega,\ z_1 = \Delta \sin J;$$

also

$$\begin{aligned} \cos\varpi &= \cos J \cos\Omega \\ \sin\varpi \cos i &= \cos J \sin\Omega \\ \sin\varpi \sin i &= \sin J; \end{aligned}$$

woraus sich

$$tang\ \varpi = \frac{tang\ \Omega}{cos\ i},\quad sin\ J = sin\ \varpi\ sin\ i$$

ergibt.

Für den Halley'schen rückläufigen Kometen ist

$$a = 17{\cdot}988$$
$$(\varepsilon) = 0{\cdot}967$$
$$\Omega = 110^{\circ}.38'$$
$$\omega = 55^{\circ}.10'$$
$$i = 180^{\circ} - 17^{\circ}.45' = 162^{\circ}.15'.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden in diesem Falle, wo $\Omega < 180^{\circ}$ ist, zu setzen:

$$a = a;$$
$$e = +\ a\ (\varepsilon),\quad \varepsilon = +\ (\varepsilon);$$
$$\omega = \omega;$$
$$i = i;$$
$$tang\ \varpi = \frac{tang\ \Omega}{cos\ i},\quad 0 < \varpi < 180^{\circ}.$$

Vorträge.

Beiträge zur Kenntniss der Capricornier der österreichischen Alpen.

Von dem c. M. **Franz Ritter v. Hauer,**

k. k. Bergrath.

(Mit III Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Mai 1854.)

In ähnlicher Weise wie in einer früheren Abhandlung [1]) die Heterophyllen, habe ich es versucht im Nachstehenden die Ammoniten aus der Familie der Capricornier, welche bisher in unseren Alpen aufgefunden wurden, zu schildern.

Auch hier sind Abbildungen nur von den drei neuen Arten, die ich aufstellen zu dürfen glaube, beigegeben. Die übrigen schliessen sich so vollständig an schon bekannte und gut abgebildete Formen an, dass ihre sichere Bestimmung keiner Schwierigkeit unterlag.

---

[1]) Sitzungsberichte der kais. Akad. d. Wissensch. Mathem.-naturw. Cl. Bd. XII, S. 861.